Exercices de rentrée
MPSI-PCSI

Lycée Saint-Louis
2018-2019

Introduction

Cette feuille d'exercices s'adresse aux élèves rentrant en MPSI ou en PCSI au lycée Saint-Louis.

Il s'agit d'exercices qui sont entièrement au programme de mathématiques de terminale (voire de première). Il est en effet inutile de commencer le programme de classes préparatoires avant la rentrée. Par contre, il est indispensable de consolider les acquis du lycée.

Ces exercices permettent principalement de s'entraîner aux techniques calculatoires. Il est en effet indispensable d'avoir des bases solides en calcul afin d'être préparé à aborder les notions du programme de classes préparatoires. Afin de mieux s'entraîner, il ne faut pas utiliser la calculatrice pour résoudre les exercices.

Ce recueil d'exercices est accompagné d'un corrigé. Cependant, se contenter de lire les corrections n'apporte rien, ce qui est important est de chercher les exercices.

1 Nombres complexes

$\boxed{1}$ **Cercle trigonométrique**

On rappelle que si $x, y, a \in \mathbb{R}$, on dit que x est congru à y modulo a, noté, $x = y[a]$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$.

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :
Soit $x \in \mathbb{R}$,

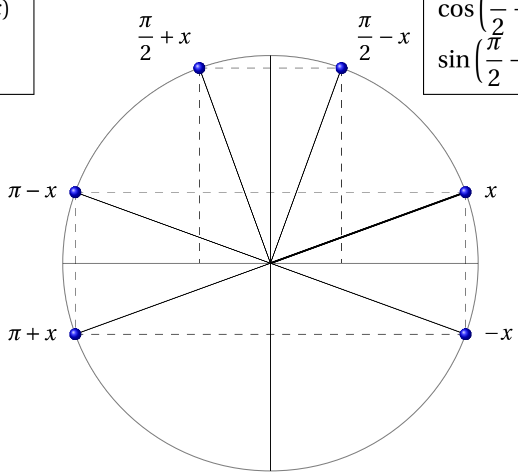
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$



Il ne s'agit pas d'apprendre par coeur ces relations mais il faut s'entrainer à les retrouver rapidement.

Les questions **1)**, **2)**, **3)** et **4)** sont indépendantes.

1) En vous aidant d'un cercle trigonométrique, compléter les égalités suivantes :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Rappeler pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ les formules d'addition donnant $\cos(x+y)$ et $\sin(x+y)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin y$.

3) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos x = 0$. **b)** $\sin x = -1$. **c)** $\cos x = \frac{1}{2}$. **d)** $e^{ix} = -i$. **e)** $e^{ix} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

4) Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) i. **b)** $1+i$. **c)** -4. **d)** $\sqrt{3}+3i$ **e)** $\frac{i}{1+i}$.

$\boxed{2}$ **Nombres complexes et fractions**

On rappelle que l'inverse d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ se calcule au moyen de la formule : $z\overline{z} = |z|^2$. En effet :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}.$$

Les questions **1)**, **2)** et **3)** sont indépendantes.

1) Calculer le module et la forme algébrique de $\dfrac{(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{3+4\mathrm{i}}$.

2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ pour lesquels :

a) $\dfrac{z+2}{z-\mathrm{i}}$ est un imaginaire pur. **b)** $\dfrac{z+2}{z-\mathrm{i}}$ est de module 1.

On décrira géométriquement chacun des deux ensembles ainsi obtenus.

3) Montrer que le nombre $\dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est un imaginaire pur pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ **Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$**

1. On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$.
   (a) Donner l'écriture trigonométrique de z.
   (b) *On rappelle qu'un nombre complexe $z = |z|e^{i\theta}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.*
   Comment choisir l'entier naturel n pour que z^n soit un imaginaire pur ?
2. (a) Soient u_1 et u_2 les deux nombres complexes distincts tels que $u_1^2 = u_2^2 = z$ avec u_1 de partie réelle positive et u_2 de partie réelle négative.
   Quels sont les modules de u_1 et u_2 ?
   (b) Déterminer des arguments de u_1 et u_2.
   Indication : on pourra justifier que l'on a $\arg(u_1) = \dfrac{\pi}{12}[\pi]$, $\arg(u_2) = \dfrac{\pi}{12}[\pi]$ *et utiliser le signe des parties réelles de u_1 et u_2 pour conclure.*
3. On pose $u_1 = x + iy$ avec x et y réels.
   Prouver que :
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$
   En déduire les valeurs de x et y.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\boxed{4}$ **Nombres complexes et géométrie**

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B et C des points d'affixes respectives i, $-i$ et $-3i$.
A tout point M d'affixe z tel que $z \neq -3i$, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{3iz-1}{z+3i}$.

1. Déterminer les points M tels que $M' = M$.
2. Montrer que, pour $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a : $\dfrac{z'+i}{z'-i} = 2\dfrac{z+i}{z-i}$.
3. Soit Π l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{1}{2}$.
   (a) *On rappelle que le cercle de centre de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon R a pour équation :* $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.
   Déterminer et construire Π (préciser les éléments de cette construction). Vérifier que C appartient à Π.
   (b) Montrer, en utilisant 2., que si M appartient à $\Pi \setminus \{C\}$, alors M' appartient à une droite fixe que l'on précisera.

$\boxed{5}$ **Sommes géométriques**

1) **a)** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (*formules d'Euler*).

b) En déduire que pour tous $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} - 1 = 2\,i\,e^{\frac{i\theta}{2}}\sin\dfrac{\theta}{2}$.

2) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que x n'est pas un multiple entier de π et on pose :

$$S = \sum_{k=0}^{n} e^{2ikx} = \underbrace{1}_{k=0} + \underbrace{e^{2ix}}_{k=1} + \underbrace{e^{4ix}}_{k=2} + \ldots + \underbrace{e^{2inx}}_{k=n}.$$

a) Simplifier S en remarquant que S est une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

b) En utilisant le résultat de la question **1)**, montrer que : $S = e^{inx}\dfrac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}$.

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx) = 1 + \cos(2x) + \cos(4x) + \ldots + \cos(2nx) = \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\cos(nx)$.

2 Calcul algébrique

$\boxed{1}$ **Equations et inéquations diverses**

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a}$.
2. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $e^{2x-1} < e^{x^2}$,
   (b) $\ln(1-2x) + \ln(x+2) \geq \ln(2x^2+x+3)$.
3. *On rappelle que, si $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^+$, on a : $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ et $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a$ ou $x \leq -a)$.*
   Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $|2x-5| < 13$,
   (b) $|3-4x| \geq 17$.
4. *On rappelle que, si $a, b \in \mathbb{R}^+$, alors $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ mais si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.*
   Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $\sqrt{2x^2+x+1} = x+1$,
   (b) $\sqrt{3x^2-4} = \sqrt{1-2x}$.
5. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + 2mx + 1 = 0$.

$\boxed{2}$ **Des inégalités**

1. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $2xy \leq x^2 + y^2$. On utilisera ce résultat dans les questions suivantes.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que : $2\sqrt{ab} \leq a + b$.
   (b) En déduire que : $8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$.
   (c) Montrer que : $\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c} \leq a$.
   (d) En déduire que : $8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq (a+b)(b+c)(c+a)$.
4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tels que $c \leq a+b$, $a \leq b+c$ et $b \leq a+c$.
   (a) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$: $2(x+y) \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$.
   (b) Montrer que : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq 2\sqrt{b}$.
   (c) En déduire que : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{a+c-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

5. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $abc = 1$. On veut montrer que :

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

   (a) On suppose ici que $a - 1 + \frac{1}{b} < 0$.

      i. Montrer que $a < 1$ et que $b > 1$.

      ii. Montrer que $b - 1 + \frac{1}{c} > 0$ et que $c - 1 + \frac{1}{a} > 0$.

      iii. En déduire la conclusion.

   (b) On suppose ici que $a - 1 + \frac{1}{b} \geq 0$, $b - 1 + \frac{1}{c} \geq 0$ et que $c - 1 + \frac{1}{a} \geq 0$.

      i. Montrer que : $b - 1 + \dfrac{1}{c} = b\left(1 + a - \dfrac{1}{b}\right)$.

      ii. En déduire que : $\left(a - 1 + \dfrac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \dfrac{1}{c}\right) \leq ba^2$.

      iii. En déduire la conclusion.

   (c) Conclure.

3 Des valeurs absolues

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + x + 1$.

   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x)$

   (b) *On rappelle que si $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$, alors pour tout réel x, on a : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^4}\right]$. Cette écriture est appelée forme canonique.*
   En utilisant la forme canonique, montrer que, pour tout réel x, $u(x) \geq \dfrac{3}{4}$.

   (c) *On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{a^2} = |a|$.*
   Montrer que, pour tout réel x, $\sqrt{u(x)} > \left|x + \dfrac{1}{2}\right|$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

   (a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que, pour tout réel x, $|f(x)| < 1$.

   (c) Montrer que, pour tout réel x, $2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$.
   Indication : on pourra distinguer les cas $x \geq -\dfrac{1}{2}$ et $x < -\dfrac{1}{2}$ et utiliser la question 1.

3. (a) Montrer que, pour tout réel x, $|f(x) - 1| = \dfrac{3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\right)}$.

   Indication : on pourra utiliser la relation suivante $a + \sqrt{b} = \dfrac{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})}{a - \sqrt{b}} = \dfrac{a^2 - b}{a - \sqrt{b}}$.

   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $|f(x) - 1| \leq \dfrac{3}{x}$.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

4 Des racines carrées

1. Montrer que la dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est $f'(x) = \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}\sqrt{1 + x}}$.

2. (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

   (b) Etudier les variations de f.
   Indication : pour étudier le signe de f', on pourra poser $X = \sqrt{x}$.

   (c) Trouver le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

3. En déduire que, pour tous $a, b \in]0, +\infty[$, $\sqrt{a + b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $a = b$.

3 Suites et fonctions

1 Calcul intégral

Les formules de dérivation : $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$, $\left(\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = u'u^n$, $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$ permettent le calcul de certaines primitives.

1) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sin x \cos x$. **b)** $x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x^2}$. **c)** $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

d) $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^3}$. **e)** $x \mapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$. **f)** $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

2) Calculer les intégrales suivantes : **a)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$. **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{2+\cos t}}\,\mathrm{d}t$.

2 Etude d'un minimum

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$.

1. Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible?
   Indication : Soit $a \in \mathbb{R}$, notons u_a la valeur du minimum de f_a. On pourra poser $g(a) = u_a$ et étudier les variations de g.

3 Des suites et des récurrences

1. On pose : $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (n+1)v_n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq n$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, v_n est appelée la factorielle de n et on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $n! = v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \end{array}$ (avec la convention $0^0 = 1$) et $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n e^{-x}}{n!}\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer f_n' en fonction de f_n et de f_{n-1}.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 f_n'(x)\,dx$.
   (c) Calculer u_0.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}$.
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
   (g) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (h) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \frac{1}{n!}$.
   (i) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{4}$ **Encore des suites et des récurrences**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit f une fonction. Dans ce problème, on utilisera la notation suivante : si elle existe, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. On a donc : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$,...

On pose : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & xe^{3x}. \end{array}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{rccc} f^{(n)}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3^n xe^{3x} + n3^{n-1}e^{3x}. \end{array}$

2. (a) Etudier les variations de f.
   (b) Montrer que $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$.

   On pose $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$? On justifiera la réponse.

4. *On rappelle que si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$, alors : $f(l) = l$.*
   Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $l = 0$.

5. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0,+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$, $f(x) - x \geq 0$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$.
   (a) Montrer que $u_1 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{5}$ **Des suites et des fonctions**

1) On note ϕ la fonction $x \mapsto \ln(x+4) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

a) Étudier les variations de ϕ.

b) En déduire que ϕ s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$ en un réel noté α.

c) Montrer — sans calculatrice ! — que : $\alpha \leq 4$.

2) On note à présent f la fonction $x \mapsto \ln(x+4)$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $x \geq 0$: $f(x) \geq 0$. On dit que l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est *stable par f*.

3) On note enfin $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

La bonne définition de cette suite repose sur la stabilité de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ par f démontrée dans la question **2)**. Le fait qu'un réel positif soit toujours envoyé par f sur un réel positif garantit qu'on puisse calculer de proche en proche les nombres $u_0, u_1, u_2\dots$ sans jamais devoir s'arrêter. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 0$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par α.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

3) **a)** Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

b) En déduire que pour tous $x, y \geq 0$: $\quad \left|f(x) - f(y)\right| \leq \dfrac{1}{4}\,|x-y|$. On pourra s'intéresser à l'intégrale $\displaystyle\int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}\,|u_n - \alpha|$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{2(n-1)}}$.

e) Proposer — sans calculatrice ! — une valeur de n pour laquelle u_n est une approximation de α à 10^{-3} près.

$\boxed{6}$ **Des études de fonctions**

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f suivante :

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} \end{array}.$$

puis la recherche de primitives de cette fonction.

Première partie : Etude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g par : $g : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-(x-1)\ln(x-1) \end{array}$.
   (a) Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.
   (c) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[e+1, e^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1,\alpha[$ et $]\alpha,+\infty[$.
2. On définit la fonction φ par : $\varphi : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x^2-1)}{x} \end{array}$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.
   (b) Montrer que φ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ pour tout $x \in]1,+\infty[$.
   (c) Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1,\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha},+\infty[$.

Deuxième partie : Etude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$.
2. En déduire :
   (a) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0,
   (b) la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$,
   (c) le sens de variation de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.
4. Représenter graphiquement f.

Troisième partie : Recherche de primitives de f

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$.
2. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x-1} - \dfrac{e^x}{e^x+1}$.
3. En déduire les primitives de f sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{7}$ **Etude de fonctions avec un paramètre**

Soit $p \in]0,1[$. On note f la fonction $x \mapsto x \ln \dfrac{x}{p} + (1-x)\ln \dfrac{1-x}{1-p}$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) Montrer que f est dérivable sur D et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D$.

c) Montrer que f' est dérivable sur D, puis que pour tout $x \in D$: $\quad f''(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

d) Résoudre l'équation : $\quad f'(x) = 0 \quad$ d'inconnue $x \in D$.

e) En déduire les variations de f sur D, puis montrer que f est positive ou nulle sur D. Les limites aux bornes ne sont pas demandées dans un premier temps.

2) **a)** Déterminer une équation de la tangente de la fonction logarithme en 1.

b) Montrer, en étudiant la fonction $x \mapsto \ln x - x$, que pour tout $x > 0$: $\quad \ln x \leq x - 1$. $\quad$ Interprétation graphique ?

c) En déduire que pour tout $x > 0$: $\quad \ln x \leq 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$.

d) En déduire que : $\quad \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\quad$ puis que : $\quad \displaystyle\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$.

e) En déduire les limites de f aux bornes de son ensemble D de définition.