Correction des exercices de rentrée
MPSI-PCSI

Lycée Saint-Louis
2018-2019

1 Nombres complexes

1 Cercle trigonométrique

1) On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$;
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$;

2) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

3) **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = -i \iff e^{ix} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \iff x = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{ix} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \iff e^{ix} = e^{\frac{3i\pi}{4}} \iff x = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

4) **a)** $i = 1 \times e^{\frac{i\pi}{2}}$, donc : $|i| = 1$ et $\frac{\pi}{2}$ est un argument de i.

b) $|1+i| = \sqrt{2}$, donc : $1+i = \sqrt{2} \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \times e^{\frac{i\pi}{4}}$, donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de $1+i$.

c) $-4 = 4 \times e^{i\pi}$, donc : $|-4| = 4$ et π est un argument de -4.

d) $\left|\sqrt{3}+3i\right| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, donc : $\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \times e^{\frac{i\pi}{3}}$, donc $\frac{\pi}{3}$ est un argument de $\sqrt{3}+3i$.

e) Nous avons déjà calculé le module et un argument de i et $1+i$. Par quotient : $\left|\frac{i}{1+i}\right| = \frac{|i|}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ est un argument de $\frac{i}{1+i}$.

2 Nombres complexes et fractions

1) Le calcul du module ne requiert pas qu'on ait calculé avant la forme algébrique :

$$\left|\frac{(2-i)(1+3i)}{3+4i}\right| = \frac{|2-i| \times |1+3i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{5} = \sqrt{2}.$$

Pour la forme algébrique : $\frac{(2-i)(1+3i)}{3+4i} = \frac{(5+5i)}{3+4i} = \frac{(5+5i)(3-4i)}{25} = \frac{(1+i)(3-4i)}{5} = \frac{7-i}{5}$.

2) **a)** On travaille par équivalence. Pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(z+2)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}\right) = \frac{\mathrm{Re}\big((z+2)(\overline{z}+i)\big)}{|z-i|^2} \quad \text{car : } |z-i|^2 \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{\mathrm{Re}\big(|z|^2 + iz + 2\overline{z} + 2i\big)}{|z-i|^2} = \frac{x^2+y^2-y+2x}{|z-i|^2} \quad \text{car : } z\overline{z} = |z|^2 = x^2+y^2 \in \mathbb{R}.$$

Aussitôt : $\frac{z+2}{z-i} \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-i}\right) = 0 \iff x^2+y^2-y+2x = 0$

$\iff (x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ après mise sous forme canonique

$\iff (x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \iff \left|z + 1 - \frac{i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

L'ensemble cherché est ainsi un cercle, en l'occurrence le cercle de centre le point d'affixe $-1 + \frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) Première réponse : L'équation étudiée s'écrit aussi : $|z+2| = |z-\mathrm{i}|$ et caractérise l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ à égale distance des points A d'affixe -2 et B d'affixe i. Cet ensemble est en d'autres termes la médiatrice du segment $[AB]$, qui passe par le milieu de $[AB]$ d'affixe $\dfrac{-2+\mathrm{i}}{2} = -1 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$, et admet le vecteur $\vec{AB}$ d'affixe $\mathrm{i}-(-2) = 2+\mathrm{i}$ pour vecteur normal.

Deuxième réponse : On travaille par équivalence. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$:

$$\left|\frac{z+2}{z-\mathrm{i}}\right| = 1 \iff |z+2|^2 = |z-\mathrm{i}|^2 \iff (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \iff 4x + 2y + 3 = 0.$$

L'ensemble cherché est ainsi une droite. Conformément à notre première réponse, cette droite passe par le point de coordonnées $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$, i.e. d'affixe $-1 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$, et admet le vecteur de coordonnées $(4,2)$ pour vecteur normal, mais donc aussi le vecteur de coordonnées $(2,1)$, i.e. d'affixe $2+\mathrm{i}$.

3) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} &= \frac{\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)}{\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2} = \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-1}{\left|(1-\cos\theta)-\mathrm{i}\sin\theta\right|^2} && \text{car : } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1 \\
&= \frac{2\mathrm{i}\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta} && \text{car : } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta) = 2\mathrm{i}\sin\theta \\
&= \frac{2\mathrm{i}\sin\theta}{2-2\cos\theta} && \text{car : } \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1 \\
&= \mathrm{i}\,\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, && \text{ce qui montre bien que } \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \text{ est imaginaire pur.}
\end{aligned}$$

3 Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{12}$

1. (a) On a $|z| = |\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$. Ainsi, $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

   (b) D'après la question précédente, on a : $z^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.
   Ainsi, z^n est un imaginaire pure si seulement si $n\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Ainsi, z^n est un imaginaire pure si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ si et seulement si $n = 3+6k$.

2. (a) On a $|u_1^2| = |z|$. Donc $|u_1^2| = 2$. D'où $|u_1| = \sqrt{2}$. On montre de même que $|u_2| = \sqrt{2}$.

   (b) On a $\arg(u_1^2) = 2\arg(u_1)[2\pi]$. De plus, $u_1^2 = z$ donc $2\arg(u_1) = \arg(z)[2\pi]$. D'après la question 1, $2\arg(u_1) = \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$. Donc $\arg(u_1) = \dfrac{\pi}{12}[\pi]$.
   On montre de même que $\arg(u_2) = \dfrac{\pi}{12}[\pi]$. Ainsi, un argument de u_1 est $\dfrac{\pi}{12}$ ou $\dfrac{\pi}{12}+\pi$. Or, la partie réelle de u_1 est positive donc $\arg(u_1) = \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$.
   De même, un argument de u_2 est $\dfrac{\pi}{12}$ ou $\dfrac{\pi}{12}+\pi$. Or, la partie réelle de u_2 est négative donc $\arg(u_2) = \dfrac{13\pi}{12}[2\pi]$.

3. On a $u_1^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$. Or, $u_1^2 = z = \sqrt{3}+i$. Ainsi, $x^2-y^2 = \mathrm{Re}(u_1^2) = \mathrm{Re}(z) = \sqrt{3}$ et $2xy = \mathrm{Im}(u_1^2) = \mathrm{Im}(z) = 1$.
   De plus, comme $u_1^2 = z$, on a $|u_1|^2 = |z|$. Or, $|u_1|^2 = x^2+y^2$. Donc $x^2+y^2 = |z| = 2$.
   En additionnant la première et la dernière équation, on a : $2x^2 = 2+\sqrt{3}$. D'où $x^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi, $x = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$. De plus, $x = \mathrm{Re}(u_1) \geq 0$. Donc $x = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$.
   Cette écriture se simplifie en : $x = \sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{2^2}} = \dfrac{|1+\sqrt{3}|}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.
   En soustrayant la dernière et la première équation, on a : $2y^2 = 2-\sqrt{3}$. D'où $y^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi, $y = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$ ou $y = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$. Or, $2xy = 1$ donc x et y sont de même signe. Ainsi, $y = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$.
   De même, l'expression de y se simplifie en $y = \sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{(\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2^2}} = \dfrac{|1-\sqrt{3}|}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4. On a $u_1 = x + iy$. De plus, d'après la question **2**, on a $u_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. En identifiant les parties réelles, on a : $x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. De même, en identifiant les parties imaginaires, on a : $y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\boxed{4}$ Nombres complexes et géométrie

1. On a :
$$M' = M \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow \frac{3iz-1}{z+3i} = z \Leftrightarrow 3iz - 1 = z(z+3i) \Leftrightarrow 3iz - 1 = z^2 + 3iz \Leftrightarrow -1 = z^2 \Leftrightarrow z = \pm i.$$
Ainsi les points M tels que $M' = M$ sont les points d'affixe i et $-i$.

2. Soient $z \neq i$ et $z \neq -3i$, on a :
$$\frac{z'+i}{z'-i} = \frac{\frac{3iz-1}{z+3i}+i}{\frac{3iz-1}{z+3i}-i} = \frac{3iz-1+(z+3i)i}{3iz-1-(z+3i)i} = \frac{3iz-1+iz-3}{3iz-1-iz+3} = \frac{4iz-4}{2iz+2} = \frac{4i(z+i)}{2i(z-i)} = 2\frac{z+i}{z-i}.$$

3. (a) Soit M un point différent de B d'affixe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}
\tfrac{MB}{MA} = \tfrac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{|z+i|}{|z-i|} = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4|z+i|^2 = |z-i|^2 \Leftrightarrow 4|x+i(y+1)|^2 = |x+i(y-1)|^2 \Leftrightarrow 4(x^2+(y+1)^2) = x^2+(y-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 4(x^2+y^2+2y+1) = x^2+y^2-2y+1 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10y+3 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\tfrac{10}{3}y+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+\left(y+\tfrac{5}{3}\right)^2 - \tfrac{25}{9} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2+\left(y+\tfrac{5}{3}\right)^2 = \tfrac{16}{9} \Leftrightarrow x^2+\left(y+\tfrac{5}{3}\right)^2 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$
Ainsi Π est le cercle de centre le point de coordonnées $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.
On a : $\frac{CB}{CA} = \frac{|-i+3i|}{|i+3i|} = \frac{|2i|}{|4i|} = \frac{1}{2}$. Donc $C \in \Pi$.

   (b) Supposons que M, d'affixe z, appartienne à $\Pi \setminus \{C\}$. Soit z' l'affixe de M'.
Comme $M \in \Pi$, on a $\frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{1}{2}$, or, d'après 2., $\frac{z+i}{z-i} = \frac{1}{2}\frac{z'+i}{z'-i}$, ainsi $\frac{|z'+i|}{|z'-i|} = 1$, donc $|z'+i| = |z'-i|$.
Posons $z' = x' + iy'$ avec $x', y' \in \mathbb{R}$, alors $|x'+i(y'+1)|^2 = |x'+i(y'-1)|^2$ d'où : $x'^2+(y'+1)^2 = x'^2+(y'-1)^2$ donc : $x'^2+y'^2+2y'+1 = x'^2+y'^2-2y'+1$ donc $y' = 0$.
Ainsi M' appartient à l'axe des abscisses.
On aurait pu également remarquer que, comme $|z'+i| = |z'-i|$, M' est equidistant des points d'affixes $-i$ et i donc appartient à la médiatrice du segment formé par ces points qui est bien l'axe des abscisses.

$\boxed{5}$ Sommes géométriques

1) **a)** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\Big((\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)\Big) = \cos\theta$

et de même : $\quad \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\Big((\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)\Big) = \sin\theta$.

b) Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad 2\,i\,e^{\frac{i\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \overset{\mathbf{a)}}{=} 2\,i\,e^{\frac{i\theta}{2}} \times \frac{e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{2i} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right) = e^{i\theta} - 1.$

2) **a)** Le nombre S est une somme de puissances consécutives de e^{2ix}. Par ailleurs, x n'étant pas un multiple entier de π : $\quad e^{2ix} \neq 1 \quad$ d'après le cercle trigonométrique. Nous savons qu'alors : $\quad S = \frac{\left(e^{2ix}\right)^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}, \quad$ où $n+1$ est le nombre de termes sommés.

b) $\quad S = \frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} \overset{\mathbf{1)b)}}{=} \frac{2\,i\,e^{i(n+1)x}\sin(nx)}{2\,i\,e^{ix}\sin x} = e^{inx}\,\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}.$

c) La partie réelle de S vaut par définition : $\quad \mathrm{Re}(S) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ikx}\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{2ikx}\right) = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx), \quad$ mais elle vaut aussi d'après **b)** : $\quad \mathrm{Re}(S) = \mathrm{Re}\left(e^{inx}\,\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right)\,\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x} = \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin x}\,\cos(nx).$

2 Calcul algébrique

$\boxed{1}$ **Equations et inéquations diverses**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{b-a}{ab} \Leftrightarrow x=\frac{ab}{b-a}.$$
Ainsi l'équation a pour unique solution : $x=\dfrac{ab}{b-a}$.

2. (a) L'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, l'inéquation a un sens sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a : $e^{2x-1} < e^{x^2} \Leftrightarrow 2x-1 < x^2$.
Donc :
$$e^{2x-1} < e^{x^2} \Leftrightarrow 0 < x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0 < (x-1)^2.$$
Or, on a $(x-1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Donc l'ensemble des solutions est : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Le logarithme népérien est défini sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'inéquation a donc un sens si et seulement si $1-2x > 0$ et $x+2 > 0$ et $2x^2+x+3 > 0$.
Or, le discriminant associé à $2x^2+x+3 = 0$ est $\Delta = 1-24 = -23 < 0$ donc $2x^2+x+3$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et comme, pour $x = 0$, $2x^2+x+3 = 3 > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $2x^2+x+3 > 0$.
De plus $1-2x > 0$ et $x+2 > 0$ si et seulement si $-2 < x < \dfrac{1}{2}$.
Donc l'inéquation a un sens pour $x \in \left]-2, \dfrac{1}{2}\right[$.
Soit $x \in \left]-2, \dfrac{1}{2}\right[$, on a :
$$\ln(1-2x)+\ln(x+2) \geq \ln(2x^2+x+3) \Leftrightarrow \ln\left((1-2x)(x+2)\right) \geq \ln(2x^2+x+3) \Leftrightarrow \ln(-2x^2-3x+2) \geq \ln(2x^2+x+3).$$
Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :
$$\ln(1-2x)+\ln(x+2) \geq \ln(2x^2+x+3) \Leftrightarrow -2x^2-3x+2 \geq 2x^2+x+3 \Leftrightarrow 0 \geq 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 0 \geq (2x+1)^2.$$
Or, on a toujours $(2x+1)^2 \geq 0$ et $(2x+1)^2 = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{1}{2}$.
Comme $-\frac{1}{2} \in \left]-2, \frac{1}{2}\right[$, l'inéquation a pour unique solution : $x = -\dfrac{1}{2}$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$|2x-5| < 13 \Leftrightarrow -13 < 2x-5 < 13 \Leftrightarrow -8 < 2x < 18 \Leftrightarrow -4 < x < 9.$$
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :$]-4,9[$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$|3-4x| \geq 17 \Leftrightarrow 3-4x \geq 17 \text{ ou } 3-4x \leq -17 \Leftrightarrow -14 \geq 4x \text{ ou } 20 \leq 4x \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \geq x \text{ ou } 5 \leq x.$$
Donc, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :$\left]-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup [5, +\infty[$.

4. (a) L'équation a un sens si et seulement si $2x^2+x+1 \geq 0$. Or le discriminant associé à $2x^2+x+1 = 0$ est $\Delta = 1-8 = -7 < 0$, donc $2x^2+x+1$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, comme pour $x = 0$, $2x^2+x+1 = 1 \geq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2+x+1 \geq 0$.
Donc l'équation a un sens sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x < -1$, alors $x+1 < 0$, or $\sqrt{2x^2+x+1} \geq 0$, donc $\sqrt{2x^2+x+1} \neq x+1$.
   - Si $x \geq -1$, alors $x+1 \geq 0$ et $\sqrt{2x^2+x+1} \geq 0$ donc :
$$\sqrt{2x^2+x+1} = x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2+x+1 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$
Comme $0 \geq -1$ et $1 \geq -1$, les solutions de l'équation sont 0 et 1.

(b) L'équations a un sens si et seulement si $3x^2-4 \geq 0$ et $1-2x \geq 0$. Or $3x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \left(x \geq \dfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x \leq -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ et $1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$. De plus $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, donc l'équation a un sens pour $x \in \left]-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$.
Soit $x \in \left]-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, comme $\sqrt{3x^2-4} \geq 0$ et $\sqrt{1-2x} \geq 0$, on a :
$$\sqrt{3x^2-4} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 3x^2-4 = 1-2x \Leftrightarrow 3x^2+2x-5 = 0.$$

Or le discriminant associé à $3x^2+2x-5=0$ est $\Delta=4+60=64$, ses racines sont donc : $\dfrac{-2\pm 8}{6}$, c'est-à-dire 1 et $-\dfrac{5}{3}$.
Or $1>-\frac{2}{\sqrt{3}}$ donc $x=1$ n'est pas solution de l'équation. Et $-\dfrac{5}{3}\leq-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{5}{3}\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 5\sqrt{3}\geq 6\Leftrightarrow 75\geq 36$. Comme $75\geq 36$, on a bien $-\dfrac{5}{3}\leq-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Ainsi l'équation a pour unique solution $x=-\dfrac{5}{3}$.

5. Le discriminant associé à $x^2+2mx+1=0$ est $\Delta=4m^2-4=4(m^2-1)$.

- Si $m=\pm 1$, alors $\Delta=0$, donc l'équation admet pour unique solution, $x=-m$.
- Si $m>1$ ou $m<-1$, alors $\Delta>0$, donc les solutions de l'équation sont $x=\dfrac{-2m+2\sqrt{m^2-1}}{2}=-m+\sqrt{m^2-1}$ et $x=\dfrac{-2m-2\sqrt{m^2-1}}{2}=-m-\sqrt{m^2-1}$.
- Si $-1<m<1$, alors $\Delta<0$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

$\boxed{2}$ Des inégalités

1. Soient $x,y\in\mathbb{R}$.
On a : $(x-y)^2\geq 0$, ainsi $x^2-2xy+y^2\geq 0$, d'où $x^2+y^2\geq 2xy$ ce qui est le résultat demandé.

2. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$. En appliquant le résultat précédent à $\sqrt{x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, on a : $(\sqrt{x})^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 2\sqrt{x}.\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, d'où $x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geq 2$.

3. (a) En appliquant le résultat de la question 1. à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, on a : $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\geq 2\sqrt{a}.\sqrt{b}$, d'où $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.
(b) On a : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ et, en raisonnant de même : $a+c\geq 2\sqrt{ac}$ et $b+c\geq 2\sqrt{bc}$. Toutes ces quantités étant positives, on obtient par produit : $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8\sqrt{abacbc}$, d'où $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$.
(c) En appliquant 1. à $\sqrt{a+b-c}$ et $\sqrt{a-b+c}$, on a : $2\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}\leq(\sqrt{a+b-c})^2+(\sqrt{a-b+c})^2$, ainsi $2\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}\leq a+b-c+a-b+c$ donc $2\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}\leq 2a$, d'où $\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}\leq a$.
(d) On a : $\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}\leq a$ et, en raisonnant de même : $\sqrt{b+a-c}\sqrt{b-a+c}\leq b$ et $\sqrt{c+b-a}\sqrt{c-b+a}\leq c$.
Toutes ces quantités étant positives, on obtient par produit :
$\sqrt{a+b-c}\sqrt{a-b+c}\sqrt{b+a-c}\sqrt{b-a+c}\sqrt{c+b-a}\sqrt{c-b+a}\leq abc$. Donc $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leq abc$, d'où $8(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leq 8abc$. Ainsi, d'après 3.b, $8(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leq(a+b)(a+c)(b+c)$.

4. (a) Soient $x,y\in\mathbb{R}^+$. On a : $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y$. Or, d'après 3.(a), $2\sqrt{xy}\leq x+y$. Ainsi : $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\leq 2(x+y)$.
(b) En appliquant le résultat précédent à $x=a+b-c$ et $y=b+c-a$, on a :
$(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a})^2\leq 2(a+b-c+b+c-a)$. Donc : $(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a})^2\leq 4b$. Et comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\leq 2\sqrt{b}$.
(c) On a : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\leq 2\sqrt{b}$ et, en raisonnant de même : $\sqrt{b+a-c}+\sqrt{a+c-b}\leq 2\sqrt{a}$ et $\sqrt{a+c-b}+\sqrt{c+b-a}\leq 2\sqrt{c}$. Donc, en sommant ces trois inégalités : $2(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+c-b})\leq 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}$. D'où : $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+c-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

5. (a)
i. On a $\dfrac{1}{b}>0$ donc $a-1<a-1+\frac{1}{b}<0$, ainsi $a<1$.
De plus $a>0$, donc $-1+\dfrac{1}{b}<a-1+\dfrac{1}{b}<0$ ainsi $\dfrac{1}{b}<1$ donc $b>1$.
ii. On a $b-1>0$ et $\dfrac{1}{c}>0$ donc : $b-1+\frac{1}{c}>0$.
On a $a<1$ donc $\dfrac{1}{a}-1>0$ et $c>0$, ainsi : $c-1+\frac{1}{a}>0$.
iii. Par produit : $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)<0$, donc : $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$.

(b)
i. On a : $b-1+\dfrac{1}{c}=b\left(1-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{bc}\right)$. Or $abc=1$ donc : $\dfrac{1}{bc}=a$. Ainsi : $b-1+\dfrac{1}{c}=b\left(1+a-\dfrac{1}{b}\right)$.
ii. On a $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)=b\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+a-\dfrac{1}{b}\right)=b\left(a+\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\right)\left(a-\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\right)=b\left(a^2-\left(\dfrac{1}{b}-1\right)^2\right)\leq ba^2$, car $\left(\dfrac{1}{b}-1\right)^2\geq 0$.
iii. On a : $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\leq ba^2$.
De même, on a : $\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\leq ac^2$ et $\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\leq cb^2$.

Donc, par produit : $\left(\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right)^2 \leq (abc)^3$.

Or $abc = 1$, donc : $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$.

(c) Si $a-1+\frac{1}{b} < 0$ ou $b-1+\frac{1}{c} < 0$ ou $c-1+\frac{1}{a} < 0$, alors d'après 5.(a), on a la conclusion.
Sinon : $a-1+\frac{1}{b} \geq 0$ et $b-1+\frac{1}{c} \geq 0$ et $c-1+\frac{1}{a} \geq 0$, donc, d'après 5.(b), on a la conclusion.
D'où, dans tous les cas : $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$.

$\boxed{3}$ Des valeurs absolues

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $u(x) = x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$. Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} u(x) = +\infty$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $u(x) = x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. Or, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Donc $u(x) \geq \frac{3}{4}$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question précédente, on a $u(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. Donc $u(x) > \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

   D'où $\sqrt{u(x)} > \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$. Ainsi, $\sqrt{u(x)} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$.

2. (a) D'après la question 1.b, on a $u(x) \geq \frac{3}{4} > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 \neq 0$. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 1.c, on a $\sqrt{x^2+x+1} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$. D'où $\sqrt{x^2+x+1} > \left|\frac{2x+1}{2}\right|$.
   Donc $\sqrt{x^2+x+1} > \frac{|2x+1|}{2}$.
   D'où $1 > \frac{|2x+1|}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Ainsi, $|f(x)| < 1$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$,
   - Si $x \geq -\frac{1}{2}$, alors $2x+1 \geq 0$. De plus, $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4} > 0$ d'après la question 1.b. Donc par somme, on a : $2x+1+2(x^2+x+1) > 0$.
   - si $x < -\frac{1}{2}$ alors $2x+1 < 0$ donc $|2x+1| = -(2x+1)$. Or, d'après la question 1.c, on a $\frac{|2x+1|}{2} < \sqrt{x^2+x+1}$ d'où $-\frac{2x+1}{2} < \sqrt{x^2+x+1}$. Donc $-(2x+1) < 2\sqrt{x^2+x+1}$. Ainsi, $2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} > 0$.

   On a donc prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} > 0$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $|f(x)-1| = \left|\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - 1\right| = \left|\frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right| = \left|\frac{(2x+1-2\sqrt{x^2+x+1})(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}{2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}\right|$.

$$= \left|\frac{(2x+1)^2-4(x^2+x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| = \left|\frac{(4x^2+4x+1-4x^2-4x-4)}{2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}\right|$$
$$= \left|\frac{-3}{2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}\right| = \frac{3}{|2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})|}$$

   Or, $\sqrt{x^2+x+1} > 0$ et d'après la question précédente, $2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} > 0$.
   Ainsi, $|f(x)-1| = \frac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})}$

   (b) Soit $x > 0$, $x^2+x+1 \geq 1$ donc $\sqrt{x^2+x+1} \geq 1$. Ainsi, $2\sqrt{x^2+x+1} \geq 2 \geq 1$.
   De plus, $2x+1+2\sqrt{x^2+x+1} \geq 2x+1 \geq x > 0$ car $x+1 \geq 0$. D'où, par produit, $2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}) \geq x > 0$.
   Par décroissance de la fonction inverse, on a : $\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})} \leq \frac{1}{x}$. Donc $|f(x)-1| \leq \frac{3}{x}$.

   (c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

$\boxed{4}$ Des racines carrées

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables.
   Soit $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \sqrt{1+x}\left(-\frac{1}{2(\sqrt{x})^2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{1+x})^2}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$
$$= \frac{x(\sqrt{x}+1)-1-x}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \frac{x\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$$

2. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ si et seulement si $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases}$ si et seulement si $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $X = \sqrt{x}$. on a $x\sqrt{x} - 1 = X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$.
Ainsi, $x\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)((\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$. Donc $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$.
De plus, on a : $x\sqrt{x}\sqrt{x+1} > 0$ et $x + \sqrt{x} + 1 > 0$. Enfin, $\sqrt{x} - 1 > 0$ si et seulement si $\sqrt{x} > 1$ si et seulement si $x > 1$ (car $x > 0$).
Ainsi, $f'(x) > 0$ si $x \in]1, +\infty[$ et $f'(x) < 0$ si $x \in]0, 1[$.
Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]0, 1]$.
Ainsi, f admet un minimum en 1 valant $f(1) = 2\sqrt{2}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{a}{b} > 0$.
On a $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1 + \dfrac{a}{b}} \times \left(1 + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right) = \dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}}\left(1 + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a+b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)$. Or, d'après la question précédente on a pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2\sqrt{2}$. Ainsi, $\sqrt{a+b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\sqrt{2}$. De plus, le minimum de f n'est atteint que pour $x = 1$.
Ainsi, l'égalité a lieu si et seulement si $\dfrac{a}{b} = 1$ c'est à dire si et seulement si $a = b$.

3 Suites et fonctions

1 Calcul intégral

1) **a)** La fonction $x \mapsto \sin x \cos x$ est de la forme $u'u$ si on note u la fonction sinus, donc admet $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{2}$ pour primitive.

b) La fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x^2} = -\dfrac{1}{4} \times (-4x)\mathrm{e}^{-2x^2}$ est à une constante multiplicative près de la forme $u'\mathrm{e}^u$ si on note u la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2}$, donc admet $x \mapsto -\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x^2}$ pour primitive.

c) La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+1}$ est à une constante multiplicative près de la forme $\dfrac{u'}{u}$ si on note u la fonction strictement positive $x \mapsto x^2 + 1$, donc admet $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$ pour primitive.

d) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^3} = \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^{-3}$ est de la forme $u'u^{-3}$ si on note u la fonction $x \mapsto \ln x$, donc admet $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{2(\ln x)^2}$ pour primitive.

e) La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ est de la forme $u'\mathrm{e}^u$ si on note u la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$, donc admet $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ pour primitive.

f) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}$ est à une constante multiplicative près de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc admet $x \mapsto 2\sqrt{1+\ln x}$ pour primitive.

2) **a)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\ln\left(1+x^3\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{\ln 2}{3}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{2+\cos t}}\,\mathrm{d}t = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t}{2\sqrt{2+\cos t}}\,\mathrm{d}t = -2\left[\sqrt{2+\cos t}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = -2\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

2 Etude d'un minimum

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f_a'(x) = e^{x-a} - 2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} f_a'(x) > 0 &\iff e^{x-a} > 2 \\ &\iff e^x > 2e^a \\ &\iff x > \ln(2e^a) \\ &\iff x > \ln(2) + a \end{aligned}$$

Ainsi, f_a est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(2)+a]$ et strictement croissante sur $[\ln(2)+a, +\infty[$.
Donc, f_a admet un minimum en $a+\ln(2)$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $u_a = f_a(\ln(2)+a) = e^{\ln(2)+a-a} - 2(\ln(2)+a) + e^a = 2 - 2\ln(2) - 2a + e^a$. On définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(a) = 2 - 2\ln(2) - 2a + e^a$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $g'(a) = -2 + e^a$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $-2+e^a > 0$ si et seulement si $a > \ln(2)$.
Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(2)]$ et strictement croissante sur $[\ln(2), +\infty[$. Ainsi, la fonction g admet un minimum en $\ln(2)$ et ce minimum vaut $g(2) = 2 - 2\ln(2) - 2\ln(2) + e^{\ln(2)} = 2 - 4\ln(2) + 2 = 4 - 4\ln(2)$.
Ainsi le minimum de f_a est minimum pour $a = \ln(2)$ et ce minimum vaut alors $4 - 4\ln(2)$.

3 Des suites et des récurrences

1. (a)
   - Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1 \geq 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \geq 0$.
     On a $v_{n+1} = (n+1)v_n$, donc, comme $n+1 \geq 0$ et $v_n \geq 0$, on a $v_{n+1} \geq 0$.

   On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = (n+1)v_n - v_n = nv_n \geq 0$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c)
   - Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1 \geq 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \geq n$.
     On a $v_{n+1} = (n+1)v_n$, ainsi :
     - Si $n \geq 1$, comme $v_n \geq n \geq 1$, on a $v_{n+1} \geq n+1$.
     - Si $n = 0$, comme $v_0 = 1 \geq 1$, on a $v_{n+1} \geq n+1$.

     Dans tous les cas, on a $v_{n+1} \geq n+1$.

   On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq n$.

   (d) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a, d'après le théorème de comparaison des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   (e)
   - Pour $n = 1$, on a $v_1 = 1.v_0 = 1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.
     On a alors : $v_{n+1} = (n+1)v_n = v_n \times (n+1) = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n \times (n+1)$.

   On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})}{n!} = \frac{nx^{n-1}e^{-x}}{n!} - \frac{x^ne^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} - \frac{x^ne^{-x}}{n!} = f_{n-1}(x) - f_n(x).$$
   Donc : $f_n' = f_{n-1} - f_n$.

   (b) Comme f_n est une primitive de f_n', on a : $\displaystyle\int_0^1 f_n'(x)\,dx = [f_n(x)]_0^1 = \frac{e^{-1}}{n!}$.

   (c) On a : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-1) = 1 - e^{-1}$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $f_n' = f_{n-1} - f_n$, on a : $\int_0^1 f_n'(x)\,dx = \int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   Donc : $\dfrac{e^{-1}}{n!} = u_{n-1} - u_n$. Ainsi : $u_n = u_{n-1} - \dfrac{1}{en!}$.

   (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\dfrac{1}{en!} \geq 0$, on a, d'après la question précédente : $u_n \leq u_{n-1}$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (f) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a : $\dfrac{x^ne^{-x}}{n!} \geq 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}x^n}{n!}\,dx \geq 0$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

   (g) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

   (h) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, comme $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq e^{-x} \leq 1$, on a : $\dfrac{x^ne^{-x}}{n!} \leq \dfrac{1}{n!}$. Donc, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n!}\,dx = \frac{1}{n!}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \dfrac{1}{n!}$.

   (i) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n!}$.
   Or d'après 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4 Encore des suites et des récurrences

1. • Pour $n = 1$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = 3^n xe^{3x} + n3^{n-1}e^{3x}$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 3^n xe^{3x} + n3^{n-1}e^{3x}$.
   Alors $f^{(n)}$ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = 3^n e^{3x} + 3^{n+1}xe^{3x} + n3^n e^{3x} = 3^{n+1}xe^{3x} + (n+1)3^n e^{3x}.$$
   On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 3^n xe^{3x} + n3^{n-1}e^{3x}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x+1)e^{3x}$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $3x+1$.
   Donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
   (b) On a : $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{-1}$. Or $e^{-1} < 1$, donc $-\frac{1}{3}e^{-1} > -\frac{1}{3}$, ainsi : $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$.

3. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

• Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = 0$. Alors $u_{n+1} = f(0) = 0$.

   On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.

4. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur $\mathbb{R}$, alors, on a $f(l) = l$, c'est-à-dire $le^{3l} = l$. Donc $l(e^{3l} - 1) = 0$. Ainsi $l = 0$ ou $e^{3l} = 1$. Donc : $l = 0$.

5. (a) • Pour $n = 0$, on a $u_0 \in]0, +\infty[$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0, +\infty[$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Or f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc $u_{n+1} > f(0)$. Comme $f(0) = 0$, on a $u_{n+1} \in]0, +\infty[$.
   On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, +\infty[$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = u_n e^{3u_n} - u_n = u_n(e^{3u_n} - 1)$. Or $u_n \geq 0$, ainsi $e^{3u_n} - 1 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $n \geq 0$, on a : $u_n \geq u_0$.
   (d) Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée, alors, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ et d'après 4., on a $l = 0$.
   Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$, donc, par passage à la limite $l \geq u_0$ donc $0 \geq u_0$ ce qui est absurde.
   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (a) • Pour $n = 0$, on a $u_0 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$. Or f est strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{3}, 0\right[$, donc $u_{n+1} \in \left[f\left(-\frac{1}{3}\right), f(0)\right[$. Comme $f(0) = 0$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$, on a $u_{n+1} \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) Soit $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$. On a $f(x) - x = xe^{3x} - x = x(e^{3x} - 1)$. Or $x < 0$ et $e^{3x} - 1 < 0$, donc $f(x) - x \geq 0$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ d'après la question précédente, car $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 0, elle est donc convergente vers $l \in \mathbb{R}$. D'après 4., on a $l = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. (a) Comme f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$, alors $u_1 \in \left]f(-\frac{1}{3}), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$. Or $f(-\frac{1}{3}) > -\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Donc $u_1 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) La suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$ vérifie les hypothèses de la question 6. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\boxed{5}$ **Des suites et des fonctions**

1) **a)** La fonction $x \mapsto x+4$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$: $\phi'(x) = \dfrac{1}{x+4} - 1 = -\dfrac{x+3}{x+4} < 0$. Il en découle que ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Pour tout $x \geq 0$: $\phi(x) = x\left(\dfrac{\ln(x+4)}{x+4} \times \dfrac{x+4}{x} - 1\right)$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = (+\infty)\times(0\times 1 - 1) = -\infty$. Par ailleurs : $\phi(0) = \ln 4 > \ln 1 = 0$. En outre, ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a)** et elle y est continue car dérivable, donc s'y annule une et une seule fois d'après la version strictement monotone du théorème des valeurs intermédiaires.

c) Comme ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après **a)** et : $\phi(\alpha) = 0$, il nous suffit de montrer que : $\phi(4) < 0$. Or : $\phi(4) = \ln 8 - 4 = \ln\left(2^3\right) - 4 = 3\ln 2 - 4 < 3\ln \mathrm{e} - 4 = -1 < 0$.

2) Pour tout $x \geq 0$: $x+4 \geq 1$, donc : $f(x) = \ln(x+4) \geq \ln 1 = 0$.

3) **a)** Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \alpha$. Nous allons le montrer par récurrence.

Initialisation : Par définition de α : $u_0 = 0 \leq \alpha$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $u_n \leq \alpha$. Or la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ par composition des fonctions croissantes $x \mapsto x+4$ et $x \mapsto \ln x$, donc : $f(u_n) \leq f(\alpha)$, i.e. comme voulu : $u_{n+1} \leq \alpha$.

b) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{n+1}$. Nous allons le montrer par récurrence.

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \ln 4 \geq \ln 1 = 0 = u_0$, donc : $u_0 \leq u_1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $u_n \leq u_{n+1}$. Or f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, i.e. comme voulu : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

c) Croissante majorée d'après **a)** et **b)**, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente d'après le théorème de la limite monotone, disons de limite ℓ. A priori, rien ne garantit que : $\ell = \alpha$, car nous avons seulement montré que α est un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — parmi d'autres. Cela dit, la fonction f est continue en ℓ, donc : $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$, donc si nous faisons tendre n vers $+\infty$ dans la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ qui est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient : $f(\ell) = \ell$. Conclusion : $\ell = \alpha$ d'après le résultat d'unicité de **2)a)**.

3) **a)** Pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{x+4}$, donc en effet : $f'(x) \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.

b) Soient $x, y \geq 0$. Comme le résultat demandé ne dépend pas de l'ordre dans lequel x et y sont rangés, on peut supposer sans perte de généralité que : $y \leq x$. Ainsi, d'après **a)** : $\displaystyle\int_y^x 0 \,\mathrm{d}t \leq \int_y^x f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_y^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$ par croissance de l'intégrale, donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral : $0 \leq f(x) - f(y) \leq \dfrac{x-y}{4}$, et donc : $\left|f(x) - f(y)\right| \leq \dfrac{1}{4}\,|x-y|$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $x = u_n$ et $y = \alpha$ dans **b)**, cela donne : $|u_{n+1} - \alpha| = \left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leq \dfrac{1}{4}\,|u_n - \alpha|$.

d) **Initialisation :** D'après **1)c)** : $|u_0 - \alpha| = \alpha \leq 4 = \dfrac{1}{2^{-2}} = \dfrac{1}{2^{2(0-1)}}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{2(n-1)}}$. D'après **c)** :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\,|u_n - \alpha| \overset{\text{HDR}}{\leq} \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^{2(n-1)}} = \frac{1}{2^{2n}}.$$

e) D'après **d)**, il nous suffit de trouver une valeur de n pour laquelle : $\dfrac{1}{2^{2(n-1)}} < 10^{-3}$, i.e. : $2^{2(n-1)} > 1000$. Or la première puissance de 2 qui dépasse 1000 est 2^{10} comme on le vérifie aisément à la main : $2^{10} = 1024$. Pour $n = 6$, on a donc bien : $2^{2(n-1)} = 2^{10} > 1000$. Conclusion : u_6 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

$\boxed{6}$ **Des études de fonctions**

Première partie : Etude de fonctions auxiliaires

1. (a) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, donc, par comppposition des limites, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 1^+} -(x-1)\ln(x-1) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$, on a : $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$.

(b) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par composée et produit, g est dérivable sur $]1,+\infty[$.
Soit $x \in]1,+\infty[$. On a :

$$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \frac{x-1}{x-1} = 1 - \ln(x-1).$$

(c) Soit $x \in]1,+\infty[$, on a : $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x-1) \Leftrightarrow e > x-1 \Leftrightarrow x < e+1$.
Ainsi g est strictement croissante sur $]1, e+1[$ et strictement décroissante sur $]e+1,+\infty[$.

(d) La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[e+1, e^3+1]$. De plus $g(e+1) = 2(e+1) - e\ln(e) = e+2 > 0$ et $g(e^3+1) = 2(e^3+1) - e^3\ln(e^3) = 2 - e^3 < 0$ donc $0 \in [g(e^3+1), g(e+1)]$.
Ainsi l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[e+1, e^3+1]$.
Comme g est strictement décroissante sur $[e+1,+\infty[$ et que $g(\alpha) = 0$, alors : $g > 0$ sur $[e+1,\alpha[$ et $g < 0$ sur $]\alpha,+\infty[$.
De plus, g est strictement croissante sur $]1, e+1[$ et $\lim_{x\to 1} g(x) = 2 > 0$, donc $g > 0$ sur $]1, e+1[$.
Ainsi : $g > 0$ sur $[1,\alpha[$ et $g < 0$ sur $]\alpha,+\infty[$.

2. (a) On a $\lim_{x\to 1} \ln(x^2-1) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1} x = 1$, donc, par quotient : $\lim_{x\to 1} \varphi(x) = -\infty$.
Soit $x \in]1,+\infty[$, on a : $\varphi(x) = \dfrac{\ln\left(x^2(1-\frac{1}{x^2})\right)}{x} = \dfrac{2\ln(x) + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 2\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$.
Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$.
Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

(b) La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+}*$ et, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $x^2-1 \in \mathbb{R}^{+*}$, donc par composée et par quotient, φ est dérivable sur $]1,+\infty[$.
Soit $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2-1}x - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}.$$

Or, $x^2(x^2-1) > 0$ donc $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$.

(c)
- Soit $x \in]1,\sqrt{\alpha}[$, alors $x^2 \in]1,\alpha[$ donc $g(x^2) \geq 0$, ainsi φ est croissante sur l'intervalle $]1,\sqrt{\alpha}[$.
- Soit $x \in]\sqrt{\alpha},+\infty[$, alors $x^2 \in]\alpha,+\infty[$ donc $g(x^2) \leq 0$, ainsi φ est décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha},+\infty[$.

Deuxième partie : Etude de la fonction f

1. Soit $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(e^x) = \dfrac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = f(x)$.

2. (a) On a $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim_{x\to 1} \varphi(x) = -\infty$, donc, par composition : $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

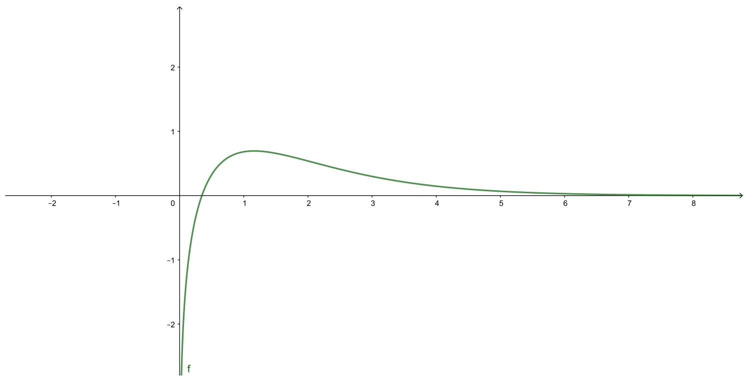
(b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c)
- Soit $x \in]1,\ln(\sqrt{\alpha})[$, alors $e^x \in]1,\sqrt{\alpha}[$. Or exp est croissante sur $]1,\ln(\sqrt{\alpha})[$ et φ est croissante sur $]1,\sqrt{\alpha}[$, donc, par composition, f est croissante sur $]1,\ln(\sqrt{\alpha})[$.
- Soit $x \in]\ln(\sqrt{\alpha}),+\infty[$, alors $e^x \in]\sqrt{\alpha},+\infty[$. Or exp est croissante sur $]\ln(\sqrt{\alpha}),+\infty[$ et φ est décroissante sur $]\sqrt{\alpha},+\infty[$, donc, par composition, f est décroissante sur $]\ln(\sqrt{\alpha}),+\infty[$.

Ainsi f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Soit $x \in]0,+\infty[$, on a : $f(x) \leq f(\ln(\sqrt{\alpha})$. Or $f(\ln(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{\ln(e^{2\ln(\sqrt{\alpha})}-1)}{e^{\ln(\sqrt{\alpha})}} = \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$.
Or $g(\alpha) = 0$ donc $(\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 2\alpha$, ainsi $\ln(\alpha-1) = \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.
Donc : $f(\ln(\sqrt{\alpha}) = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)} = \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.
D'où : $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4.



Troisième partie : Recherche de primitives de f

1. Soit $x \in]0,+\infty[$, on a :
$$f'(x)+f(x)=\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}e^x-\ln(e^{2x}-1)e^x}{e^{2x}}+\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}=\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}e^x}{e^{2x}}=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$$
De plus : $\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}=\dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$.
Donc : $f'(x)+f(x)=\frac{2e^x}{e^{2x}-1}$.

2. Une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x-1}$ est $x\mapsto\ln(e^x-1)$.
Une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x+1}$ est $x\mapsto\ln(e^x+1)$. Donc, une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}$ est $x\mapsto\ln(e^x-1)-\ln(e^x+1)$, c'est-à-dire $x\mapsto\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

3. Soit $x\in]0,+\infty[$, on a $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{e^x}{e^x+1}-f'(x)$. Or une primitive de f' est f. Donc : $x\mapsto\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}-f(x)$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
Ainsi les primitives de f sur $]0,+\infty[$ sont : $x\mapsto\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}-f(x)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ Etude de fonctions avec un paramètre

Par définition : $f(x)=x\ln\dfrac{x}{p}+(1-x)\ln\dfrac{1-x}{1-p}=x\ln x-x\ln p+(1-x)\ln(1-x)-(1-x)\ln(1-p)$.

1) **a)** La quantité $f(x)$ est bien définie si $\ln x$ et $\ln(1-x)$ sont bien définis, autrement dit si : $x>0$ et $1-x>0$.
Conclusion : $D=]0,1[$.

b) La fonction $x\mapsto 1-x$ est dérivable sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $x\mapsto\ln(1-x)$ est dérivable sur $]0,1[$. Ensuite, les fonctions $x\mapsto x$, $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto 1-x$ sont dérivables sur $]0,1[$, donc par somme, produit et multiplication par un réel, f est dérivable sur $]0,1[$. Ensuite, pour tout $x\in]0,1[$:
$$\begin{aligned}f'(x)&=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-\ln p+(-1)\times\ln(1-x)+(1-x)\times\frac{-1}{1-x}-(-1)\ln(1-p)\\&=\ln x+1-\ln p-\ln(1-x)-1+\ln(1-p)=\ln x-\ln(1-x)-\ln p+\ln(1-p).\end{aligned}$$

c) D'après cette expression de f' trouvée en **b)** et les arguments avancés pour la dérivabilité de f, la fonction f' est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$: $f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

d) Pour tout $x\in]0,1[$: $f'(x)=0\iff\ln x-\ln(1-x)-\ln p+\ln(1-p)=0\iff\ln\dfrac{x}{1-x}=\ln\dfrac{p}{1-p}$
$$\iff\frac{x}{1-x}=\frac{p}{1-p}\iff(1-p)x=p(1-x)\iff x=p.$$

e) La fonction f'' est strictement positive sur $]0,1[$ d'après **c)**, donc f' y est strictement croissante. D'après **d)**, f' est donc strictement négative sur $]0,p[$ et strictement positive sur $]p,1[$, donc f est strictement décroissante sur $]0,p]$ et strictement croissante sur $[p,1[$. Ces variations montrent que f est minimale en p. Son minimum vaut : $f(p)=p\ln\dfrac{p}{p}+(1-p)\ln\dfrac{1-p}{1-p}=0$. Ce résultat montre comme voulu que f est positive ou nulle sur $]0,1[$.

2) **a)** La tangente de la fonction logarithme en 1 a pour équation : $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1 = x-1$.

b) Notons δ la fonction $x \longmapsto \ln x - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par différence et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\delta'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. La fonction δ' est ainsi positive ou nulle sur $]0,1]$ et négative ou nulle sur $[1,+\infty[$, donc δ est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Comme : $\delta(1) = -1$, ces variations montrent que δ est majorée par -1 sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. que pour tout $x > 0$: $\ln x \leq x-1$. Graphiquement, cela revient à dire que le graphe de la fonction logarithme est toujours situé sous sa tangente en 1, ce qui se visualise assez bien !

c) Pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} > 0$, donc d'après **b)** : $\ln \sqrt{x} \leq \sqrt{x} - 1$, donc d'après les propriétés du logarithme : $\ln x \leq 2\left(\sqrt{x}-1\right)$.

d) Pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \frac{\ln x}{x} \overset{\textbf{c)}}{\leq} \frac{2}{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$, or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}\right) = 0$, donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Composons ensuite cette limite avec la limite : $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{1}{t} = +\infty$, ce qui revient à poser : $x = \frac{1}{t}$.

Il vient : $\lim\limits_{t\to0} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 0$, i.e. : $\lim\limits_{t\to0} t\ln t = 0$.

e) D'après **d)** : $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$. Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x) = 0$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\ln(1-x) = 0$. Or pour tout $x \in]0,1[$: $f(x) = x\ln x - x\ln p + (1-x)\ln(1-x) - (1-x)\ln(1-p)$, donc d'une part : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\ln(1-p)$ et d'autre part : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\ln p$.