Exercices de rentrée
MPSI-PCSI

Lycée Saint-Louis
2017-2018

Introduction

Cette feuille d'exercices s'adresse aux élèves rentrant en MPSI ou en PCSI au lycée Saint-Louis.

Il s'agit d'exercices qui sont entièrement au programme de mathématiques de terminale (voire de première). Il est en effet inutile de commencer le programme de classes préparatoires avant la rentrée. Par contre, il est indispensable de consolider les acquis du lycée.

Ce sont des exercices de mathématiques qui ont pour objectif d'être à la fois utiles pour les mathématiques et la physique. Certains exercices sont constitués de calculs extrêmement basiques mais sur lesquels les étudiants ont l'habitude de faire des erreurs. D'autres exercices utilisent des notions plus compliquées. Les exercices doivent être traités **sans utiliser la calculatrice**. En effet, la calculatrice sera interdite à la majorité des devoirs de mathématiques, il faut donc s'habituer à effectuer les calculs basiques sans utiliser cet outil.

Les notions concernant le calcul vectoriel seront utiles pour les sciences de l'ingénieur et pour la physique. Les rappels de cours contiennent également des compléments de cours accessibles aux élèves de terminale et qui permettront de démarrer plus facilement l'année dans ces dicsiplines.

Les exercices sont précédés de rappels de cours qui concernent uniquement les domaines utiles pour le programme de mathématiques de MPSI et de PCSI.

Les exercices sont classés en quatre catégories :

- Les exercices d'échauffement : il s'agit d'exercices basiques qui doivent être traités en respectant l'indication de temps afin d'acquérir plus de rapidité dans la résolution. Ces exercices doivent être parfaitement maîtrisés. Il peut donc être profitable de les recommencer en cas d'erreur ou de non respect de la durée indiquée.

- Les exercices corrigés : ils sont accompagnés d'une correction rédigée. Il ne faut pas vérifier uniquement la validité du résultat obtenu, mais également la manière de rédiger afin de commencer à repérer les différences entre la rédaction demandée au lycée et celle demandée en MPSI ou en PCSI.

- Les exercices à préparer : ils sont accompagnés d'indications et ce sont les exercices sur lesquels il faut accentuer ses recherches, quitte à ne pas travailler les exercices supplémentaires.

- Les exercices supplémentaires : ils sont également accompagnés d'indications et sont destinés aux élèves qui ont assez de temps pour les travailler.

Il est indispensable de se remettre au travail avant la rentrée afin d'être prêt à démarrer directement au rythme d'une classe préparatoire. Il est donc vivement conseillé de travailler les exercices de cette feuille au moins deux semaines avant la rentrée, et en cas de difficultés, de consulter les rappels de cours, son cours ou un livre afin de combler ses lacunes. Cependant il n'est pas obligatoire de réussir à faire tous les exercices, le but de cette feuille est, principalement, d'aborder sereinement la rentrée. Il est recommandé de conserver une trace de son travail (par exemple de garder ses brouillons).

Table des matières

Première partie

Rappels de cours

Chapitre 1

Nombres complexes

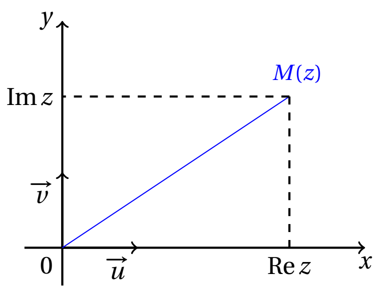
Définition. On appelle ensemble des **nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $z = x + iy$ avec x et y deux réels et où i est tel que $i^2 = -1$.

Plus précisément, tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Cette écriture est appelée **écriture algébrique de** z. x est appelé **partie réelle** de z, noté $\mathrm{Re}(z)$ et y est appelé **partie imaginaire** de z et noté $\mathrm{Im}(z)$.
L'ensemble des nombres complexes est muni de deux opérations (l'addition et la multiplication) qui possèdent les mêmes propriétés que celles sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x', y' quatre réels alors :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$
$$z \times z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Proposition. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a : $z = z'$ si et seulement si $\big(\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\big)$.

Interprétation géométrique des nombres complexes
On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M de coordonnées (x, y) (resp. à tout vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$) avec x, $y \in \mathbb{R}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$.
On dit que z est l'**affixe** de M (resp. de $\overrightarrow{w}$) et M (resp. $\overrightarrow{w}$) est appelé image de z. On note $M(z)$ (resp. $(\overrightarrow{w}(z))$.



Pour tout point $A(a)$ et $B(b)$ du plan, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

Définition. Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$ avec x et y deux réels. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $x - iy$.

Remarque. Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition. Soient z, z' deux nombres complexes. Alors :

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Si de plus, $z' \neq 0$, on a :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Définition. Soit le nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$, avec x et y deux réels. On appelle module de z et on note $|z|$ le réel positif

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Interprétation géométrique du module :
Si on note $M(z)$ ou $\overrightarrow{w}(z)$ alors $|z| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$ ou $|z| = ||\overrightarrow{w}||$.
Si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points du plan alors $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Proposition. Soient z, z' deux nombres complexes. Alors :

$$z = 0 \iff |z| = 0$$

$$|z|^2 = z\overline{z}\ ; \qquad |\overline{z}| = |z|$$

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

Si de plus $z' \neq 0$:

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}\ ; \qquad \frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{|z'|^2}$$

Remarque. Pour calculer l'inverse d'un nombre complexe z, ou simplifier une expression du type $\dfrac{z_1}{z_2}$ on multipliera toujours numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Définition - Proposition. Soit z un nombre complexe **non nul**, alors il existe $r > 0$ et θ un réel tels que $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. On a alors : $r = |z|$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique**.

Définition. Soit z un nombre complexe **non nul**. On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ tout réel θ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Proposition. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Soit n un entier relatif.

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]\ ; \qquad \arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]\ ; \qquad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$$

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]\ ; \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]\ ; \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$$

Remarque. Soit z un nombre complexe :

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\arg(z))\ ; \qquad \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\arg(z))$$

Ces relations permettent de faire le lien entre la forme algébrique et la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Interprétation géométrique de l'argument :
Si on note $M(z)$ le point du plan d'affixe z, alors $\arg(z)$ représente une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Définition. Soit θ un réel. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Soit z un nombre complexe non nul dont un argument est θ, on appelle **forme exponentielle** de z l'écriture $z = |z|e^{i\theta}$.

Proposition. Soient θ, θ' deux réels et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}\ ; \qquad e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}\ ; \qquad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}\ ; \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

Formule de Moivre :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Proposition (Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels).
Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients réels a, b, c avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation et on note Δ le nombre $b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle, appelée racine double :

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet pour solution deux complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2),$$

z_1, z_2 étant les solutions (distinctes ou confondues) de $az^2 + bz + c = 0$.

Remarque. Toute fonction du second degré $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Cette écriture est appelée forme canonique.

Chapitre 2

Suites

2.1 Principe de récurrence

Proposition. Soit $\mathscr{P}$ une propriété dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.
Si on a :

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$, est vraie

alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2.2 Propriétés globales

Notation :
Une suite de nombres réels ou complexes est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut également noter (u_n) sans autre précision.

⚠Il ne faut pas confondre (u_n) et u_n : (u_n) désigne une suite, l'indice n est alors muet et n'a donc pas besoin d'être défini ; u_n désigne un des termes de la suite, l'indice n n'est pas muet et doit être défini au préalable.

Définition. Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que la suite (u_n) est croissante si et seulement si :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n.$$
- On dit que la suite (u_n) est décroissante si et seulement si :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n.$$
- On dit que la suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n.$$
- On dit que la suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n.$$

⚠Une suite n'est pas toujours monotone, autrement dit, il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes. Pour montrer qu'une propriété est vraie pour toutes les suites, il ne suffit donc pas de traiter le cas des suites croissantes et le cas des suites décroissantes.

Définition. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) est majorée si et seulement si :
$$\text{il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M,$$
- (u_n) est minorée si et seulement si :
$$\text{il existe } m \in \mathbb{R} \text{ tel que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m,$$
- (u_n) est bornée si et seulement si (u_n) est majorée et minorée, c'est-à-dire si et seulement si :
$$\text{il existe } m, M \in \mathbb{R} \text{ tels que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M.$$

⚠Les réels m et/ou M ne doivent pas dépendre de n.

Définition. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $q \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) est une suite géométrique de raison q si et seulement si :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n.$$
- Soit $r \in \mathbb{R}$, on dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison r si et seulement si :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

⚠La raison d'une suite géométrique ou arithmétique ne dépend pas de n.

Proposition. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $q \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite géométrique de raison q, on a :
$$\text{pour tout } n \in [\![0, +\infty [\![,\ u_n = q^n u_0,$$
et :
$$\text{pour tout } n_0 \in [\![0, +\infty [\![,\text{pour tout } n \geq n_0,\ u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}.$$
- Soit $r \in \mathbb{R}$, soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, on a :
$$\text{pour tout } n \in [\![0, +\infty [\![,\ u_n = u_0 + nr,$$
et :
$$\text{pour tout } n_0 \in [\![0, +\infty [\![,\text{pour tout } n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n - n_0) r.$$

Proposition.

- Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
- Soient $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$,
$$1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

2.3 Propriétés asymptotiques

Notation :
On parle de la convergence ou de la divergence d'une suite, on écrira donc (u_n) converge/diverge sans oublier les parenthèses.
Lorsqu'on a prouvé qu'elle existait, la limite d'une suite est notée $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

Théorème. Soit (u_n) une suite réelle.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) est convergente.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) est convergente.

Théorème. Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) des suites réelles.

- Si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si $\lim u_n = \lim w_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$,
  alors : $\lim v_n = l$.
- Si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et si $\lim u_n = +\infty$,
  alors : $\lim v_n = +\infty$.
- Si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq w_n$ et si $\lim w_n = -\infty$,
  alors : $\lim v_n = -\infty$.

Les tableaux ci-dessous résument les opérations sur les limites connues.
Soient (u_n) et (v_n) des suites à valeurs réelles. Soient $\lambda, l, l' \in \mathbb{R}$.

$\lim(\mathbf{u_n} + \mathbf{v_n})$	$\lim u_n = l$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim u_n = -\infty$
$\lim v_n = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim v_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim v_n = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim(\lambda \mathbf{u_n})$	$\lim u_n = l$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim u_n = -\infty$
$\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

$\lim(\mathbf{u_n}.\mathbf{v_n})$	$\lim u_n = l \neq 0$	$\lim u_n = 0$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim u_n = -\infty$
$\lim v_n = l' \neq 0$	$l.l'$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim v_n = 0$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim v_n = +\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$\lim v_n = -\infty$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

$\lim \frac{\mathbf{u_n}}{\mathbf{v_n}}$	$\lim u_n = l \neq 0$	$\lim u_n = 0$	$\lim u_n = +\infty$	$\lim u_n = -\infty$
$\lim v_n = l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim v_n = 0$	$\pm\infty(*)$	forme indéterminée	$\pm\infty(*)$	$\pm\infty(*)$
$\lim v_n = +\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim v_n = -\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée

$(*)$La règle des signes donne le signe de la limite du quotient.

On ne donne ici que les résultats propres aux suites, on peut également utiliser les limites de fonctions pour calculer des limites de suites.

Proposition. Soit $q \in \mathbb{R}$,

- si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$,
- si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$,
- si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$,
- si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.

Chapitre 3

Fonctions

3.1 Limites de fonctions

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient $\lambda, l, l' \in \mathbb{R}$.
On considère, dans les tableaux suivants, deux fonctions f et g telles que les limites données aient un sens.
On suppose que g est définie sur I.

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{f(x)}+\mathbf{g(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{f(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lambda > 0$	λl	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda < 0$	λl	$-\infty$	$+\infty$
$\lambda = 0$	0	0	0

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}(\mathbf{f(x)}.\mathbf{g(x)})$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \neq 0$	$l.l'$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$+\infty$ si $l > 0$ $-\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$-\infty$ si $l > 0$ $+\infty$ si $l < 0$	forme indéterminée	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ si $l' > 0$ $-\infty$ si $l' < 0$	$-\infty$ si $l' > 0$ $+\infty$ si $l' < 0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\pm\infty(*)$	forme indéterminée	$\pm\infty(*)$	$\pm\infty(*)$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	0	0	forme indéterminée	forme indéterminée

$(*)$ La règle des signes donne le signe de la limite du quotient.

Proposition. Composition des limites
Soit $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient f et g des fonctions telles que les limites suivantes aient un sens. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Proposition.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Proposition.

$$\lim_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Proposition.

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty.$$

Remarque. On rappelle que, par définition, si f est dérivable en a, alors :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Ce résultat permet d'obtenir des limites qui sont des formes indéterminées du type "$\frac{0}{0}$".
Il est souvent appliqué avec $a = 0$.

Proposition.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Proposition.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0.$$

Proposition.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0.$$

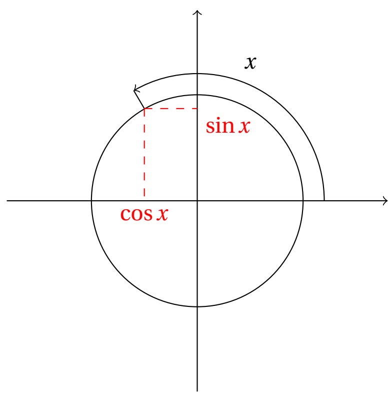
Théorème.
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient f, g, h des fonctions définies sur un intervalle I et telles que les limites suivantes aient un sens. Soit $l \in \mathbb{R}$

- Si : pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si : $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$, alors :
$$\lim_{x \to a} g(x) = l.$$
- Si : pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et si : $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors :
$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty.$$
- Si : pour tout $x \in I$, $g(x) \leq h(x)$ et si : $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$, alors :
$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty.$$

3.2 Fonctions usuelles

3.2.1 Sinus et cosinus

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. On note M le point du cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$ a pour mesure x radians. On note alors $(\cos x, \sin x)$ les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle cosinus la fonction $x \mapsto \cos(x)$ et sinus la fonction $x \mapsto \sin(x)$.



On admet que cette définition géométrique permet de bien définir cos et sin et qu'elles vérifient les propositions suivantes :

Proposition.

- La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique (c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$), paire (c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$), dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

- La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique (c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$), impaire (c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$), dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

- Leurs variations sur $[0, \pi]$ sont données par :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\sin)'(x)$		$+$	0	$-$	
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\cos)'(x)$	0		$-$		0
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Proposition.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

Le tableau suivant donne les valeurs usuelles à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

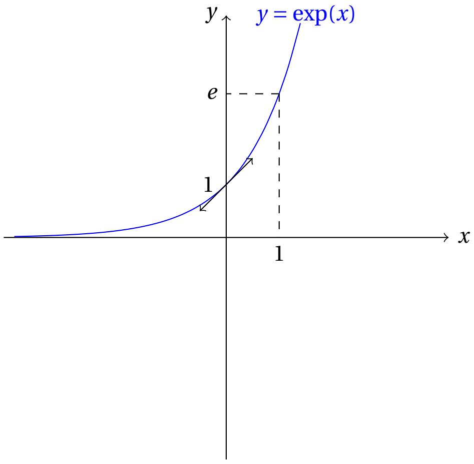
3.2.2 Exponentielle

Définition. On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

Proposition. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ et exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

⚠Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut utiliser les notations $\exp(x)$ ou e^x qui signifient la même chose. Cependant, lorsque l'on parle de la **fonction** exponentielle, on doit utiliser la notation exp.

La courbe représentative de la fonction exp est :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$				$+$			
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition. Si u est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = u'(x)\exp(u(x))$.

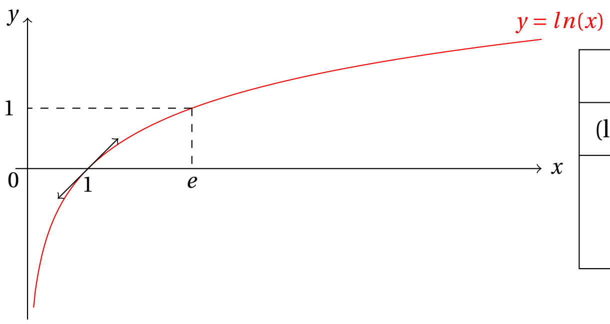
Proposition.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

3.2.3 Logarithme

Définition. On appelle logarithme népérien et on note ln l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

Proposition. ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La courbe représentative de la fonction ln est :



x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln)'(x)$	$\Vert$			$+$			
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$$

Proposition. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ln(a) = b \text{ si et seulement si } a = \exp(b).$$

Remarque. On en déduit que $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Chapitre 4

Intégration

4.1 Primitives

Définition. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Proposition. Deux primitives d'une même fonction **sur un intervalle** diffèrent d'une constante.

Proposition. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Primitives usuelles

Fonction f	une primitive de f	sur l'intervalle
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et $n \neq -1$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \exp(\lambda x)$, $\lambda \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{\lambda}\exp(\lambda x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(\lambda x)$, $\lambda \neq 0$	$x \mapsto \dfrac{\sin(\lambda x)}{\lambda}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(\lambda x)$, $\lambda \neq 0$	$x \mapsto -\dfrac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$	$\mathbb{R}$

Primitives de quelques fonctions composées

Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et n un entier relatif différent de -1.

Fonction f	une primitive de f
$x \mapsto u'(x)(u(x))^n$	$x \mapsto \dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$

Si de plus, u est strictement positive sur I :

$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto \ln(u(x))$
$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$

4.2 Intégrale

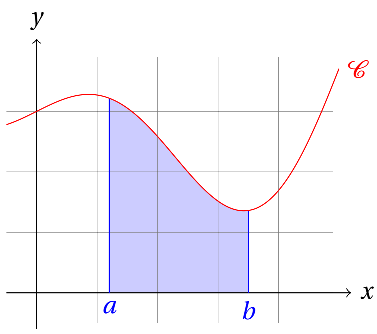
Définition. Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I. Soit F une primitive de f sur I. On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Remarque.

- La définition ne dépend pas de la primitive choisie.
- La différence $F(b) - F(a)$ est souvent notée sous la forme condensée $\Big[F(t)\Big]_a^b$. On écrit alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b$.

Interprétation géométrique :
Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est égal à l'aire algébrique de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Proposition. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ s'annulant en a.

Proposition (Linéarité de l'intégrale).
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ, μ deux réels.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

Proposition (Relation de Chasles).
Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a, b, c trois réels de I. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Proposition. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b deux réels.

- **Positivité de l'intégrale :** si $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ et si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$ alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- **Croissance de l'intégrale :** si $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ et si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Définition. Soit f une fonction continue sur I et soient a, b deux réels distincts de I. On appelle valeur moyenne de f le réel défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

Chapitre 5

Calcul vectoriel

5.1 Bipoint et vecteur

5.1.1 Bipoint

Soit $\mathscr{E}$, espace affine euclidien de dimension 3, en pratique l'espace physique qui nous entoure.

On appelle bipoint tout couple ordonné de points de $\mathscr{E}$. Le bipoint (A, B) (voir figure 5.1(a)) est défini par :

- son origine, par exemple le point A;
- son support, soit la droite (D) passant par les points A et B;
- son sens, par exemple de A vers B;
- et sa norme, soit la distance ℓ entre les points A et B.

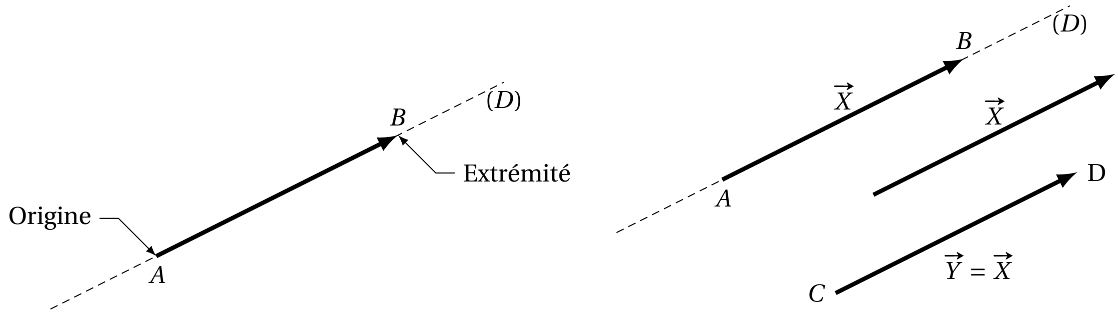
Deux bipoints non nuls sont dits équipollents s'ils ont des supports parallèles, un même sens et une même norme. Par ailleurs, le bipoint (A, A) est appelé « bipoint nul ».

5.1.2 Vecteur

L'ensemble des bipoints équipollents au bipoint (A, B) constitue une classe d'équivalence appelée vecteur et notée de manière standardisée avec une flèche : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{X}$. Le vecteur $\overrightarrow{X}$ représenté par un bipoint désigne (voir figure 5.1(b)) :

- une direction,celle de la droite (D), passant par les points A et B;
- un sens, de A vers B ou de B vers A, indiqué par la flèche;
- une norme, notée $\|\overrightarrow{X}\|$ et correspondant à la distance entre les points A et B.

Deux vecteurs $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{Y} = \overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si les bipoints (A, B) et (C, D) associés sont équipollents : voir figure 5.1.



(a) Bipoint (b) Vecteur associé à un bipoint

FIGURE 5.1 – Bipoint et vecteur

5.2 Repérage des vecteurs

5.2.1 Base de l'espace vectoriel

On appelle « base de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ » tout triplet de vecteurs $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ linéairement indépendants[1] tel que tout vecteur $\overrightarrow{X}$ de $\mathscr{E}$ puisse s'écrire de façon unique $\overrightarrow{X} = x\overrightarrow{x_1} + y\overrightarrow{y_1} + z\overrightarrow{z_1}$ (avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) dans la base b_1.

5.2.2 Base orthonormée directe

Une base $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est dite orthonormée si ses vecteurs :

- sont orthogonaux deux à deux : on aura donc $\overrightarrow{x_1} \perp \overrightarrow{y_1}$, $\overrightarrow{y_1} \perp \overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{z_1} \perp \overrightarrow{x_1}$;
- de norme égale à 1 : on aura donc $\|\overrightarrow{x_1}\| = \|\overrightarrow{y_1}\| = \|\overrightarrow{z_1}\| = 1$.

La base orthonormée sera dite *directe* si les trois vecteurs ordonnés définissant la base vérifient la structure de la figure 5.2, avec l'ordre des doigts pouce / index / majeur correspondant à l'ordre des vecteurs.

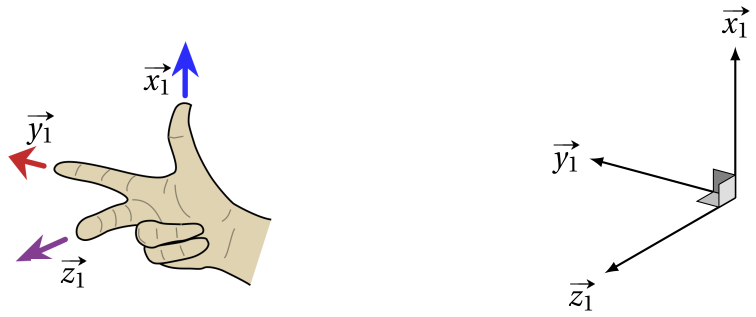


FIGURE 5.2 – Position des vecteurs d'une base visualisée par les doigts de la main droite

Dans la suite de ce document, les bases sont toutes supposés orthonormées directes.

1. Aucun des trois vecteurs ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des deux autres.

5.2.3 Repère orthonormée direct de l'espace affine

Un repère $\mathscr{R}_1$ de l'espace affine $\mathscr{E}$ est constitué par l'association d'un point origine du repère O et d'une base orthonormée directe $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ de l'espace vectoriel réel $\mathscr{E}$ associé à $\mathscr{E}$. Ce repère est le plus souvent noté $\mathscr{R}_1(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ (d'autres notations existent mais elles sont beaucoup plus rares).

5.2.4 Composantes d'un vecteur dans une base

Définition

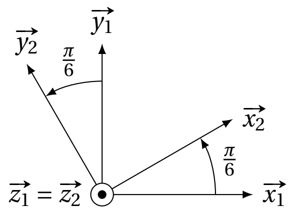
On appelle « composantes d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ dans une base $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ » les trois scalaires x, y et z tels que

$$\overrightarrow{X} = x\overrightarrow{x_1} + y\overrightarrow{y_1} + z\overrightarrow{z_1}$$

Remarque : dans une base orthonormée (cas d'étude le plus classique), les composantes correspondent aux projections vectorielles x, y et z du vecteur sur les directions $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{z_1}$ associées aux trois vecteurs de la base.

Les composantes seront généralement notées sous forme de données verticales : $\overrightarrow{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{b_1}$.

Exemple



Pour un vecteur $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x_2} + 3\overrightarrow{y_2} + 2\overrightarrow{z_2}$

$$\overrightarrow{X}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{b_2} \quad \text{et } \overrightarrow{X}\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}-3}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}_{b_1}$$

FIGURE 5.3 – Mise en évidence de la nécessité d'indication de la base

En effet, $\begin{cases} \overrightarrow{x_2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{x_1} + \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{y_1} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{y_1}\right) \\ \overrightarrow{y_2} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{x_1} + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{y_1} = \dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{x_1} + \sqrt{3}\overrightarrow{y_1}\right) \\ \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1} \end{cases}$.

Utilisation des composantes pour déterminer la norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur correspond à sa « longueur », donc à la distance entre son origine et son extrémité : cette grandeur est donc indépendante de la base de définition des composantes.La norme d'un vecteur $\overrightarrow{X}$ se détermine, dans une base orthonormée directe, par la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes :

$$\boxed{\|\overrightarrow{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

5.2.5 Coordonnées d'un point dans un repère

Les coordonnées x, y et z d'un point M dans un repère $\mathscr{R}_1(O; \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ sont les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ associée au repère $\mathscr{R}_1$.

5.2.6 Définition d'une rotation plane

On désigne par rotation plane le passage d'une base à une autre qui ne nécessite qu'une seule orientation autour d'un des vecteurs de la base de départ. On la représente généralement à l'aide d'une figure plane telle que celle de la figure 5.4.

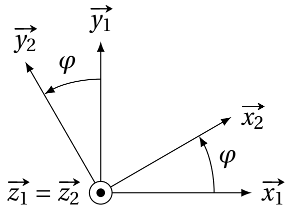


FIGURE 5.4 – Figure de calcul associée à une rotation plane

5.3 Opérations mathématiques

5.3.1 Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est défini par :

$$\boxed{(\vec{A},\vec{B}) \in \mathscr{E}^2 \longmapsto \vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right) \in \mathbb{R}}$$

Par cette définition, la norme du vecteur $\vec{A}$ peut se déterminer par le produit scalaire de ce vecteur avec lui-même :

$$\boxed{\|\vec{A}\| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}}$$

Propriétés

Commutativité

Le produit scalaire est symétrique :

$$\boxed{\forall(\vec{A},\vec{B}) \in \mathbb{R}^2 \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}}$$

Distributivité et linéarité

Le produit scalaire est distributif et linéaire (ou bilinéaire) :

$$\boxed{\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) \in \mathscr{E}^3 \qquad \vec{A}\cdot(\lambda\vec{B}+\mu\vec{C}) = \lambda\vec{A}\cdot\vec{B}+\mu\vec{A}\cdot\vec{C}}$$

Condition de nullité du produit scalaire

Le produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ dans les cas suivants :

- un des deux vecteurs est nul : $\boxed{\vec{A} = 0}$ ou $\boxed{\vec{B} = 0}$;
- les deux vecteurs sont orthogonaux : $\boxed{\vec{A} \perp \vec{B}}$

Expression analytique
Si $\overrightarrow{A} = \alpha_1\overrightarrow{x_1}+\alpha_2\overrightarrow{y_1}+\alpha_3\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{B} = \beta_1\overrightarrow{x_1}+\beta_2\overrightarrow{y_1}+\beta_3\overrightarrow{z_1}$ avec $b_1(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ une base orthonormée directe, alors

$$\boxed{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \alpha_1\alpha_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i}$$

Attention, il faut nécessairement que les deux vecteurs soient exprimés dans la même base (ici, $b_1(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$) pour que l'expression précédente ait du sens.

5.3.2 Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ est une application bilinéaire et anti-symétrique, notée

$$\boxed{(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})\in\mathscr{E}^2 \longmapsto \overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\|\|\overrightarrow{B}\|\left|\sin\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)\right|\overrightarrow{n}}$$

où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal au plan généré par les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

Le vecteur $\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}$ est donc perpendiculaire à la fois au vecteur $\overrightarrow{A}$ et au vecteur $\overrightarrow{B}$, les trois vecteurs formant alors une base directe [2] telle que représentée sur la figure 5.5.

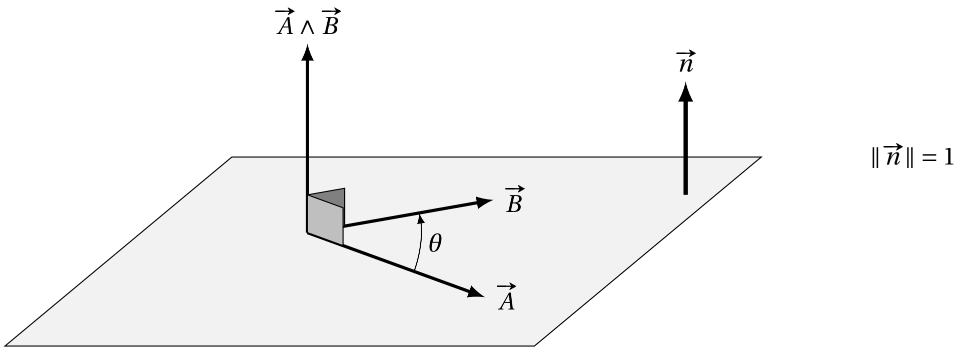


FIGURE 5.5 – Position du vecteur déterminé par le produit vectoriel

Propriétés

Commutativité
Le produit vectoriel est anticommutatif :

$$\boxed{\forall(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})\in\mathbb{R}^2 \qquad \overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{A}}$$

Distributivité et linéarité
Le produit vectoriel est distributif et linéaire (ou bilinéaire) :

$$\boxed{\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } \forall(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\overrightarrow{C})\in\mathscr{E}^3 \qquad \overrightarrow{A}\wedge(\lambda\overrightarrow{B}+\mu\overrightarrow{C}) = \lambda\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}+\mu\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{C}}$$

2. L'aspect direct peut se vérifier avec la « règle des trois doigts » : voir figure 5.2.

Condition de nullité du produit vectoriel

Le produit vectoriel $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ dans les cas suivants :

- un des deux vecteurs est nul : $\boxed{\overrightarrow{A} = 0}$ ou $\boxed{\overrightarrow{B} = 0}$;
- les deux vecteurs sont colinéaires : $\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \;/\; \overrightarrow{A} = k\overrightarrow{B}}$

Expression analytique

Si $\overrightarrow{A} = \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{y_1} + \alpha_3\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{B} = \beta_1\overrightarrow{x_1} + \beta_2\overrightarrow{y_1} + \beta_3\overrightarrow{z_1}$ avec $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ une base orthonormée directe, alors $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$ a comme composantes :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{x_1} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ y = \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{y_1} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ z = \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{z_1} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{array}\right.} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} : \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}_b}$$

Les composantes sont donc obtenues par le calcul du déterminant des termes complémentaires à la composante (composantes sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$ pour la composante selon $\overrightarrow{z_1}$ par exemple).

Moyen mnémotechnique

Dans une base $b_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ orthonormée directe (tous les vecteurs sont de norme unitaire et orthogonaux deux à deux), on a (noter la simple permutation circulaire) :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{y_1} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{z_1} = -\overrightarrow{y_1} \\ \overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = -\overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\overrightarrow{x_1} \end{array}\right.$$

Les produits vectoriels entre les trois vecteurs d'une base orthonormée directe peuvent alors se déterminer par le dessin de la figure 5.6 où apparaissent les vecteurs de la base b_1 répétés cycliquement :

$$\text{Sens} - : \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\overrightarrow{x_1} \qquad \begin{array}{c} \text{Sens +} \\ \xrightarrow{\hspace{5cm}} \\ \overrightarrow{x_1} \quad \overrightarrow{y_1} \quad \overrightarrow{z_1} \quad \overrightarrow{x_1} \quad \overrightarrow{y_1} \\ \xleftarrow{\hspace{5cm}} \\ \text{Sens} - \end{array} \qquad \text{Sens} + : \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{y_1}$$

FIGURE 5.6 – Calcul des produits vectoriels entre vecteurs d'une même base orthonormée directe

En prenant trois vecteurs consécutifs, et en lisant

- de gauche à droite : les deux premiers vecteurs forment le produit vectoriel, le troisième donne le résultat avec un signe + (voir exemple sur la figure 5.6) ;
- de droite à gauche : les deux premiers vecteurs forment le produit vectoriel, le troisième donne le résultat avec un signe − (voir exemple sur la figure 5.6).

Deuxième partie

Exercices

Chapitre 6

Résolution d'équations et d'inéquations

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Nombres réels
- Suites de nombres réels
- Equations différentielles

Echauffement : 20 minutes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $a \neq b$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a}.$$
2. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   (a) $2x + 4 \leq 3$,
   (b) $3 - 2x > 5$,
   (c) $|2x - 5| < 13$,
   (d) $|3 - 4x| \geq 17$.
3. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{C}$:
   (a) $2x^2 - 14x + 24 = 0$,
   (b) $3x^2 - 12x + 12 = 0$,
   (c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

INDICATIONS P 59

Exercice corrigé

1. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3x+1}{6x-3} = -\frac{7}{6}.$$

   (b) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3x+1}{6x-3} \leq -\frac{7}{6}.$$

   (c) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16.$$

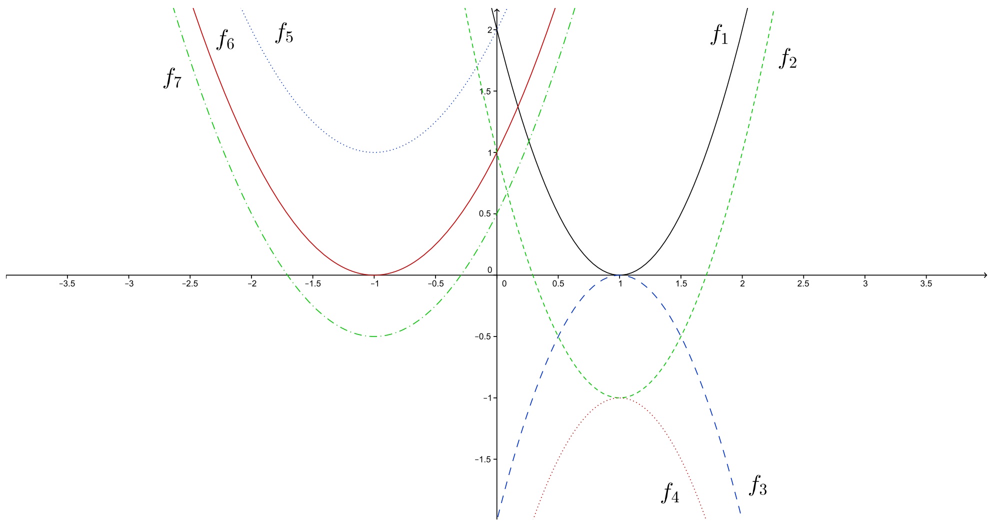
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c. \end{array}$$

   (a) Montrer que la courbe représentative de f admet un extremum (c'est-à-dire un maximum ou un minimum) au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   On étudiera différents cas en fonction du signe de a.

   (c) On considère les courbes suivantes :



   Déterminer, en justifiant la réponse, les courbes qui correspondent aux valeurs :

   i. $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$,

ii. $a = -2$, $b = 4$, $c = -2$,

iii. $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$,

iv. $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$,

v. $a = 1$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$.

CORRECTION P 69

Exercice à préparer

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ et $d \neq 0$.
   On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$(a - x)(d - x) - bc = 0.$$
   (a) Donner une condition sur a, b, c, d pour que cette équation admette deux racines réelles distinctes.

   (b) On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$(2 - x)(1 - x) - 6 = 0.$$
   Montrer que cette équation admet deux racines distinctes et déterminer ses racines que l'on notera r_1 et r_2 avec $r_1 > r_2$.
   On pose :
   $$x_0 = 2, y_0 = 1,$$
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n - 3y_n,\ y_{n+1} = -2x_n + y_n,$$
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = x_n - y_n,\ Y_n = 2x_n + 3y_n.$$
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$X_n = r_1^n \text{ et } Y_n = 7r_2^n.$$
   (d) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, les valeurs de x_n et de y_n en fonction de n.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
   On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
   $$ax^2 + bx + c = 0.$$
   (a) Donner une condition sur a, b, c pour que cette équation admette au moins une racine $r \in \mathbb{R}$.
   On suppose dorénavant que cette condition est vérifiée.

   (b) On pose :
   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{rx}. \end{array}$$
   Sans calculer r, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0.$$
   (c) On pose :
   $$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{rx}. \end{array}$$
   Quelle relation a, b, c doivent-ils vérifier pour que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = 0.$$

INDICATIONS P 59

Exercice supplémentaire

1. On considère l'équation (E_1) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0. \qquad (E_1)$$

   (a) Montrer que 1 est solution de (E_1).

   (b) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x-1)(ax^2 + bx + c),$$

   et déterminer leurs valeurs.

   (c) Résoudre l'équation (E_1).

   (d) Soit r une racine de (E_1). On pose

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{rx}. \end{array}$$

   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0.$$

2. On considère l'équation (E_2) d'inconnue $x \in \mathbb{C}$:

$$x^2 - 4x + 5 = 0. \qquad (E_2)$$

   (a) Résoudre l'équation (E_2).

   (b) On pose

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x)e^{2x}, \end{array}$$

   et

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)e^{2x}. \end{array}$$

   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) - 4g'(x) + 5g(x) = 0 \text{ et } h''(x) - 4h'(x) + 5h(x) = 0.$$

INDICATIONS P 60

Chapitre 7

Puissances et suites géométriques

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Suites de nombres réels

Echauffement : 30 minutes

1. Simplifier (sans utiliser la calculatrice) les expressions suivantes :
$$a=\frac{6^{10}}{2^7\times 3^8},\ b=\left(\sqrt{2}\right)^7,\ c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\left(-\sqrt{2}\right)^5},\ d=\frac{9^5}{3^8}.$$
2. Soient $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^*$. Simplifier les expressions suivantes :
$$A=x^5\times(2x)^3,\ B=\frac{(xy)^9}{y^7},\ C=\frac{y^9+(-y)^{14}}{y^7+y^{12}}\ (y\neq\pm 1),\ D=\frac{\left(y^2\right)^{10}}{\left(y^3\right)^6}.$$
3. On considère les suites suivantes :
$$\begin{cases} u_0=1, \\ \text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n, \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_1=2, \\ \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n \end{cases}.$$
Exprimer u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$ et v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$.
4. On considère les suites suivantes :
$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n=\sqrt{1+e^n},$$
$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_n=-\frac{1}{n+2}.$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes.

INDICATIONS P 60

Exercice corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On veut montrer les résultats connus suivants :

- si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$,
- si $x > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$,
- si $x = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$,
- si $x \leq -1$, alors la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x^n$.

1. Si $x = 1$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. Si $x = -1$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.
3. On suppose, dans cette question, que $|x| < 1$.
   (a) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.
   (c) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   On pose $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (d) Supposer que $l \neq 0$ et obtenir une contradiction.
   (e) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. On suppose, dans cette question, que $|x| > 1$.
   (a) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) On suppose, dans cette question, que $x > 1$.
      i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n(x-1)+1$.
      On pourra étudier la fonction définie, pour tout $x \in [1, +\infty[$, par $f(x) = x^n - n(x-1) - 1$.
      ii. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (c) On suppose, dans cette question, que $x < -1$.
      i. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.
      ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

CORRECTION P 71

Exercice à préparer

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n - 3^n + 4^n = 4^n \left(1 + \frac{1}{2^n} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$

(b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n - 3^n + 4^n = +\infty.$$

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(6^n)^2 - 2\times 3^n = 6^{2n}\left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}\times 3^n}\right).$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$5\times 36^n - 3^n = 6^{2n}\left(5 - \frac{1}{2^{2n}\times 3^n}\right).$$

(c) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(6^n)^2 - 2\times 3^n}{5\times 36^n - 3^n}.$$

3. Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 7^n - 3^{2n}}{4^{2n} + 6^{n+1}}.$$

4. On définit la suite :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{2(n+1)^2+1} u_n. \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{2} u_n$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

INDICATIONS P 60

Exercice supplémentaire

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$:

$$x^n = e^{n\ln x}.$$

2. Montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

On pourra utiliser la définition du nombre dérivé et remarquer que : $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}$.

3. Soit $a \in]-1, +\infty[$.

(a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a.$$

(b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Remarque : on a $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{a}{n} = 1$ et pourtant, en général, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \neq 1$.

4. Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = +\infty$.

5. Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n^n = 0$.

INDICATIONS P 61

Chapitre 8

Récurrences

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Raisonnements de début d'année

Avertissement

La compréhension des raisonnements par récurrence signifie que l'on sait faire le raisonnement mais également que l'on sait quand le faire.

Toutes les questions de ce paragraphe ne se traitent donc pas par récurrence, c'est à vous de voir si c'est le cas ou non.

Notation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit f une fonction.
Si elle existe, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
Par convention, on pose $f^{(0)} = f$. On a donc :

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'',\ f^{(3)} = f''',\ldots$$

Echauffement : 30 minutes

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{1+\cos(\pi n^2 + 2)}{2}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si n est pair, alors n^2 est pair et que si n est impair, alors n^2 est impair.

   (b) On pose $u_0 \in \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un entier pair.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{3x}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3^n e^{3x}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\cos(2\pi x)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq f(n+1)$.
   (b) Montrer que f n'est pas croissante.

INDICATIONS P 61

Exercice corrigé

1. On pose :
$$v_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = (n+1)v_n.$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq n$.
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n.$$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, v_n est appelée la factorielle de n et on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$n! = v_n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n.$$
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \end{array}$$
   (avec la convention $0^0 = 1$)
   et
$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n e^{-x}}{n!}\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer f_n' en fonction de f_n et de f_{n-1}.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 f_n'(x)\,dx$.
   (c) Calculer u_0.
   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}.$$
   (e) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
   (g) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (h) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \leq \frac{1}{n!}.$$
   (i) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CORRECTION P 73

Exercice à préparer

On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{3x}. \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3^n xe^{3x} + n3^{n-1}e^{3x}. \end{array}$$

2. (a) Etudier les variations de f.
   (b) Montrer que $f\left(-\frac{1}{3}\right) > -\frac{1}{3}$.

   On pose $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$? On justifiera la réponse.

4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors $l = 0$.

5. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, +\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

6. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$, $f(x) - x \geq 0$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

7. On suppose dans cette question que $u_0 \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$.
   (a) Montrer que $u_1 \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

INDICATIONS P 61

Exercice supplémentaire

On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln(x+1) + \frac{1+\ln 2}{2}. \end{array}$$

1. (a) Etudier les variations de f.
   (b) Montrer, sans utiliser la calculatrice, que $0 \leq f(1) \leq f(0) \leq 1$.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$.

2. On pose $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer que cette suite est bien définie.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+1}$.

   (c) Donner les valeurs exactes, puis, en utilisant la calculatrice, des valeurs arrondies à 10^{-2} près de u_0, u_1, u_2 et u_3.

   (d) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (e) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

INDICATIONS P 62

Chapitre 9

Géométrie plane et trigonométrie

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Cours de physique (optique, ...)

Dans toute cette partie, on considère un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Sauf mention du contraire, les coordonnées des points seront données dans ce repère et les coordonnées des vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Echauffement : 15 minutes

1. Simplifier (sans utiliser la calculatrice) :

$$a = \frac{0,1+0,3}{0,1},\ b = \frac{2\times(0,1+2,6)}{0,9},\ c = \frac{0,4-0,2}{1,6-1,3},\ d = 10\times(0,2+0,3)^2.$$

2. Soit A le point de coordonnées $(2,1)$, soit B le point d'ordonnée 2, d'abscisse strictement inférieure à 2 et tel que $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Soit C le point d'abscisse strictement supérieure à 1, tel que le triangle ABC soit rectangle en A et tel que $BC = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.
   (a) Représenter les points A, B et C sur une figure.
   (b) Calculer l'abscisse de B.
   (c) Calculer la longueur AC.
   (d) Soit θ l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   Calculer le cosinus et le sinus de θ.
   En déduire la valeur de θ.

INDICATIONS P 62

Exercice corrigé

Soit A un point du plan de coordonnées (x_A, y_A).
Soit B un point du plan de coordonnées (x_B, y_B) tel que $x_A \neq x_B$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x_0, y_0) tel que $x_0 \neq 0$.

1. (a) Montrer que la droite (AB) est bien définie et n'est pas verticale.
   On peut donc considérer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la droite (AB) ait pour équation : $y = ax + b$.

   (b) Montrer que :
   $$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

   (c) Montrer que :
   $$b = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}.$$

2. Soit D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

   (a) Montrer que la droite D est bien définie et n'est pas verticale.
   On peut donc considérer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la droite (AB) ait pour équation : $y = ax + b$.

   (b) Montrer que :
   $$a = \frac{y_0}{x_0}.$$

   (c) Montrer que :
   $$b = \frac{x_0 y_A - x_A y_0}{x_0}.$$

3. Soit D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

   (a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $x_0 > 0$.

   (b) Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u})$.
   Faire une figure en indiquant θ.
   On dit que θ est l'angle entre l'axe des abscisses et D.

   (c) Donner une formule reliant $\cos\theta$, $\sin\theta$ et la pente de D.

4. Applications :

   (a) Calculer la pente de la droite D, l'équation réduite de la droite D et l'angle θ entre l'axe des abscisses et D, dans les cas suivants :

      i. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(\sqrt{3}, -2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\sqrt{3}, 3)$,

      ii. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(2\sqrt{3}, 1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\sqrt{3}, -1)$,

      iii. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ et le point B de coordonnées $(\sqrt{8}, 3\sqrt{2})$,

      iv. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(\sqrt{3}, 0)$ et le point B de coordonnées $(-\sqrt{3}, 6)$.

   (b) Donner l'équation réduite de la droite D et un vecteur directeur de la droite D dans les cas suivants :

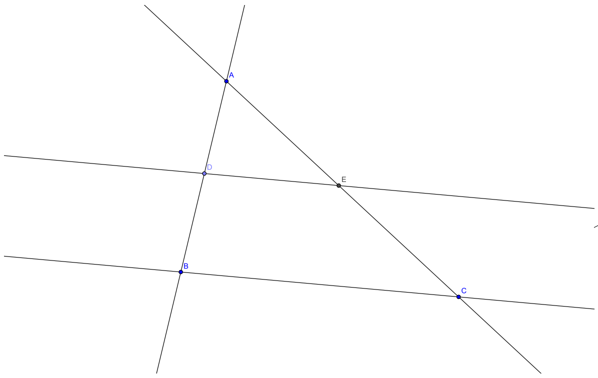
      i. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(-1, 2)$ et faisant un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses,

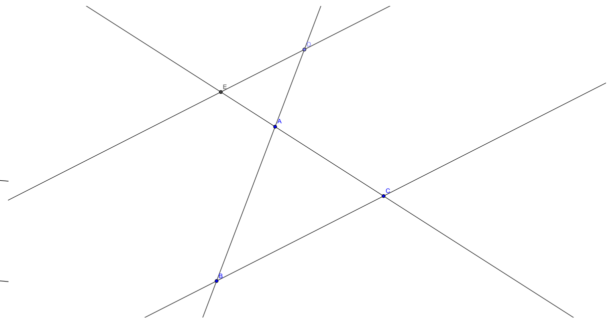
ii. D est la droite passant par le point A de coordonnées $(2\sqrt{3}, 6)$ et faisant un angle $\theta = -\frac{\pi}{6}$ avec l'axe des abscisses.

CORRECTION P 75

Exercice à préparer

1. Preuve vectorielle du théorème de Thalès.
   On rappelle l'énoncé du théorème de Thalès (vu au collège et utile pour la physique de prépa) : soient A, B, C trois points du plan deux à deux distincts et non alignés, soit D un point de la droite (AB), soit E un point de la droite (AC). On suppose que les droites (DE) et (BC) sont parallèles.





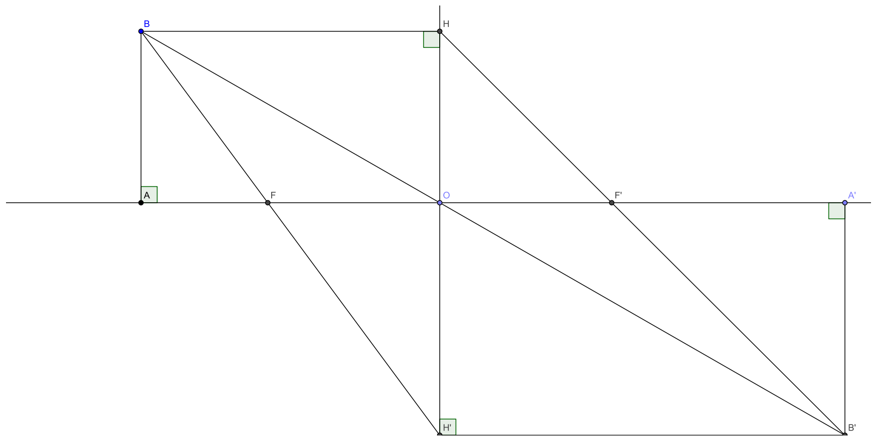
   On a alors :
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

   (a) Traduire vectoriellement les hypothèses suivantes :
      i. D est un point de la droite (AB),
      ii. E est un point de la droite (AC),
      iii. (DE) et (BC) sont parallèles.

   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, alors $a = b = 0$.

   (c) Conclure.

   (d) On considère la configuration suivante :



Montrer que :
$$\frac{F'A'}{F'O} = \frac{OA'}{OA}.$$

2. Soient A, B, C trois points du plan.

   (a) Soit G l'unique point du plan tel que :
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

      i. Montrer que :
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

      ii. Soit M un point du plan. Montrer que :
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

   (b) Soit I le milieu du segment $[AB]$.

      i. Montrer que :
$$2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

      ii. Montrer que G appartient à la droite (IC).

   (c) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC, c'est-à-dire que G est l'intersection des médianes du triangle ABC.

INDICATIONS P 63

Exercice supplémentaire

On considère un second repère orthonormé direct du plan $\mathscr{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J})$ tel que l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{I}$ soit égal à $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 2 faisant un angle $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec $\vec{i}$.

1. (a) Déterminer l'affixe de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   (c) Déterminer l'affixe de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.
   (d) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.
2. On considère le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(3, \sqrt{3})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Déterminer la norme de $\vec{v}$.
   (b) Déterminer l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{v}$.
3. On considère, dans cette question, que $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.
   (a) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
   (b) Déterminer l'angle formé par $\vec{i}$ et $\vec{u} + \vec{v}$.

INDICATIONS P 63

Chapitre 10

Dérivation et intégration

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Etude de fonctions
- Fonctions usuelles
- Primitives

Echauffement : 20 minutes

1. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de e^x et e^y les quantités suivantes :

$$a = e^{2x-y},\ b = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}},\ c = \frac{e^{3x}+e^{y-x}}{e^{x+y}+e^{2y-3x}}.$$

   (b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. Exprimer en fonction de $\ln(x)$ et $\ln(y)$ les quantités suivantes :

$$a = \ln(x^2y^5),\ b = \ln\left(-\sqrt{x}+e^{\ln(y+\sqrt{x})}\right),\ c = \frac{\ln(y^2e^{\ln x})}{2+\ln\left(\frac{x}{e^2}\right)}\ (x \neq 1).$$

   (c) Dire pour quelles valeurs de x les expressions suivantes ont un sens et les simplifier :

$$a = \ln\left(3\sqrt{e^x}\right),\ b = \ln\left((e^x+e^{-x})^2 - e^x(e^x+e^{-3x})\right),\ c = e^{-\ln(2x^4)}.$$

2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^4} \end{array},\quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(2x)e^x \end{array},\quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^{3x}}{\ln(x^2+1)} \end{array}.$$

INDICATIONS P 63

Exercice corrigé

1. On pose :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - \frac{7}{2}x + 4 & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 2]$ et sur $]2, +\infty[$, ses limites en $\pm\infty$ et tracer la courbe représentative de f.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer :

$$\int_0^x f(t)\,dt.$$

2. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} = 1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

   (b) En déduire la valeur de :

$$I = \int_3^5 \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}\,dx.$$

3. (a) On pose :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \ln x. \end{array}$$

   Calculer la dérivée de f.

   (b) En déduire la valeur de :

$$J = \int_1^e x \ln x\,dx.$$

CORRECTION P 77

Exercice à préparer

1. On pose :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{(x-1)/2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \\ (x-2)^4 + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

   (a) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 1]$, sur $]1, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, ses limites en $\pm\infty$ et tracer la courbe représentative de f.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Calculer :

$$\int_0^x f(t)\,dt.$$

2. (a) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}.$$

(b) En déduire la valeur de :
$$I=\int_3^5 \frac{x^2-3x+3}{(x-1)^3}\,dx.$$

3. (a) On pose :
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{e^{(x^2)}}{x}. \end{array}$$
Calculer la dérivée de f et la dérivée seconde de f.

(b) En déduire la valeur de :
$$J=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{e^{(x^2)}(x^2-1)}{x^3}\,dx.$$

INDICATIONS P 64

Exercice supplémentaire

1. (a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geq 1$.

(b) Montrer que, pour tout $y\in[1,+\infty[$:
$$0<y-\sqrt{y^2-1}\leq 1\leq y+\sqrt{y^2-1}.$$

(c) Soit $y\in[1,+\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $X\in[1,+\infty[$:
$$X+\frac{1}{X}=2y.$$

(d) Soit $y\in[1,+\infty[$, résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}^+$:
$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y.$$

2. On pose :
$$\begin{array}{rccl} f: &]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}). \end{array}$$

(a) Calculer la dérivée de f.

(b) En déduire la valeur de :
$$I=\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

(c) Calculer :
$$\lim_{x\to 1}\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

INDICATIONS P 64

Chapitre 11

Formules de trigonométrie

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Nombres complexes

Echauffement : 20 minutes

1. (a) Simplifier : $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

   (b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. (a) Simplifier : $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.

   (b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

   (a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

   $$x^2 - 2x + \sin^2\theta = 0. \qquad (E)$$

   On pensera à utiliser la relation, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ afin de simplifier le discriminant.

   (b) Déterminer les solutions de (E) dans les cas particuliers :

   $$\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{2\pi}{3}, \theta = \frac{\pi}{6}.$$

INDICATIONS P 65

Exercice corrigé

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. (a) Déterminer à partir du cercle trigonométrique l'expression de $\cos(\pi - \theta)$ en fonction de $\cos\theta$, puis, en utilisant les formules de trigonométrie, prouver le résultat obtenu.
   (b) Déterminer à partir du cercle trigonométrique l'expression de $\sin(\pi + \theta)$ en fonction de $\sin\theta$, puis, en utilisant les formules de trigonométrie, prouver le résultat obtenu.
   (c) Déterminer, en utilisant les questions précédentes, les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ et de $\sin\dfrac{7\pi}{6}$.
   (d) Déterminer à partir du cercle trigonométrique l'expression de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $\sin\theta$, puis, en utilisant les formules de trigonométrie, prouver le résultat obtenu.
   (e) Déterminer à partir du cercle trigonométrique l'expression de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $\cos\theta$, puis, en utilisant les formules de trigonométrie, prouver le résultat obtenu.

2. (a) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sin\theta.$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

   (c) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\theta.$$

   Préciser le résultat obtenu dans le cas particulier $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
   (d) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x + \sin x = \cos\theta + \sin\theta.$$

CORRECTION P 78

Exercice à préparer

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. (a) Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
   (b) Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
   (c) Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
   (d) Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Posons $a = \cos\dfrac{\pi}{10}$.
   (a) Montrer que $a > 0$.
   (b) Montrer que :

$$16a^4 - 20a^2 + 5 = 0.$$

3. Résoudre (sans utiliser la calculatrice), l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$16x^2 - 20x + 5 = 0.$$

4. (a) Montrer que $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) Montrer (sans utiliser la calculatrice) que :
$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
   (c) Déterminer la valeur de a.
5. Déterminer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

INDICATIONS P 65

Exercice supplémentaire

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ et } v_n = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$
   On fera attention à bien étudier le signe avant de conclure.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_{n+1} = \frac{v_n}{\sqrt{2(\sqrt{1-v_n^2}+1)}}.$$
   (c) Calculer u_3 et v_3.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(u_n - 1)^2 + v_n^2 = 4v_{n+1}^2.$$
4. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$u_n - v_n = \sqrt{2}\cos\left(\frac{(2^{n-2}+1)\pi}{2^n}\right).$$
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(u_n + i v_n)^{2^{n+1}} = 1.$$

INDICATIONS P 66

Chapitre 12

Fonctions cosinus et sinus

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Fonctions usuelles
- Cours de physique (signaux physiques, ...)

Complément

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :

- $x \mapsto \cos(u(x))$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto -u'(x) \times \sin(u(x))$,
- $x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto u'(x) \times \cos(u(x))$.

Echauffement : 15 minutes

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 4\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$B = \frac{\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{2}}$$

2. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

3. Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$0 < -3x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

4. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \cos(2x) + \sin(3x),\ f_2 : x \mapsto \cos(2x) \times \sin(3x)$$

$$f_3 : x \mapsto (\cos x)^7,\ f_4 : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

INDICATIONS P 67

Exercice corrigé

1. Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$.

   (a) Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

   (b) Calculer f' et en déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

   (c) Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

   (d) En utilisant la périodicité de la fonction f, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

   (e) Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction cos.
   Comment passe-t-on de la courbe représentative de cos à celle de f ?

2. Soit $\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(2x) \end{array}$.

   (a) Calculer $g(0)$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Calculer g' et en déduire les variations de g sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   (c) Tracer la courbe représentative de g sur l'intervalle $[0, \pi]$.

   (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x + \pi) = g(x)$.

   (e) En déduire la courbe représentative de g sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

CORRECTION P 81

Exercice à préparer

Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \end{array}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = f(x)$.

   (b) Comment pourra-t-on, à partir de la courbe représentative de f sur $\left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$, obtenir la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$?

2. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. Calculer f' et en déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right]$.

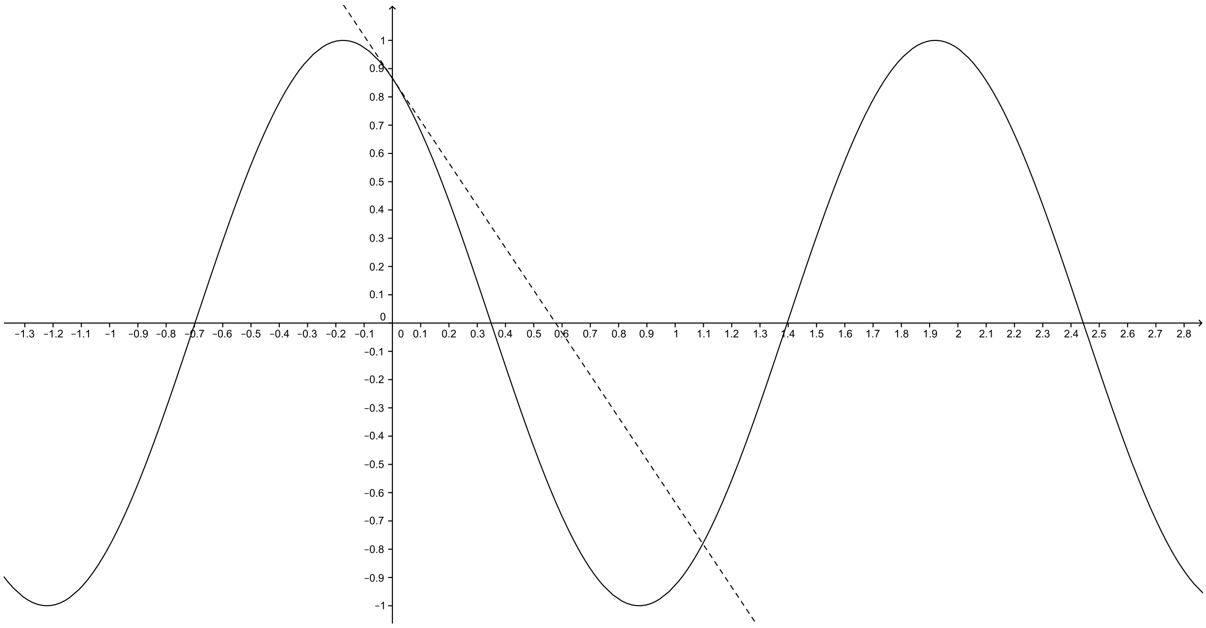
4. Tracer la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right]$ puis sur $[-\pi, \pi]$.

INDICATIONS P 67

Exercice supplémentaire

Soient $\omega \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in [0,\pi]$.

Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \cos\left(\omega t + \varphi\right) \end{array}$. On suppose que la courbe représentative de f est la suivante :



La droite représentée sur cette figure est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Le but de cet exercice est de déterminer, par lecture graphique, les valeurs de ω et φ.

1. (a) Calculer $f(0)$ puis donner, avec la précision permise par le graphique, la valeur de $f(0)$.
   (b) En déduire la valeur de φ.
2. Première méthode pour la détermination de ω.
   (a) Calculer $f'(0)$ puis donner, avec la précision permise par le graphique, la valeur de $f'(0)$.
   (b) En déduire la valeur de ω.
3. Seconde méthode pour la détermination de ω.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(t)$.
   (b) Donner, avec la précision permise par le graphique, une valeur de de T telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $f(t+T) = f(t)$.
   (c) En déduire la valeur de ω.

INDICATIONS P 67

Chapitre 13

Nombres complexes

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Nombres complexes

Echauffement : 40 minutes

1. Simplifier les quantités suivantes :

$$a = \frac{1}{i} - 2i,\ b = \frac{\frac{4+3i}{2+i}}{1-i},\ c = \frac{4+3i}{\frac{2+i}{1-i}},$$

$$d = (2-i)(1+\frac{3}{2}i),\ e = \frac{1}{\frac{1}{2-i} + \frac{1}{1+\frac{3}{2}i} - \frac{1}{7+4i}}.$$

2. Calculer la partie réelle, la partie imaginaire et le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1+2i)(3-8i),\ z_2 = \frac{3-i}{(1-2i)^2},\ z_3 = (\sqrt{3}-i)^6.$$

3. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)^4,\ z_2 = (\sqrt{18} - i\sqrt{7})^2,\ z_3 = \frac{1+ia}{b+ia} \text{ où } a, b \in \mathbb{R},\ (a,b) \neq (0,0).$$

4. Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1-i)^7,\ z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^5},\ z_3 = -(1+i\sqrt{3})(1+i)^3,\ z_4 = i(\sqrt{3}+i)^5.$$

INDICATIONS P 67

Exercice corrigé

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta \text{ et } \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta.$$

   (b) Soient $p, q \in \mathbb{R}$.

      i. Montrer que :

$$e^{ip}+e^{iq}=2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

      ii. Déterminer une formule analogue pour $e^{ip}-e^{iq}$.

   (c) Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Calculer $|e^{ip}+e^{iq}|$ et $|e^{ip}-e^{iq}|$.

2. On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{i\frac{\pi}{12}}$.

   (a) Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   (b) Déterminer un argument de z_1 et de z_2.

3. On pose $z_3 = e^{-i\frac{13\pi}{15}}+e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{-i\frac{13\pi}{15}}-e^{i\frac{\pi}{5}}$.

   (a) Calculer $|z_3|$ et $|z_4|$ en fonction de $\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)$ et $\sin\left(\frac{8\pi}{15}\right)$.

   (b) Déterminer un argument de z_3 et de z_4.

4. Soient $p, q \in]-\pi, \pi]$.

   (a) Montrer que $-2\pi < p-q < 2\pi$.

   (b) Montrer que $e^{ip}+e^{iq}$ a pour argument :

      - $\dfrac{p+q}{2}$ si $p-q \in [-\pi, \pi]$,
      - $\dfrac{p+q+2\pi}{2}$ sinon.

   (c) Montrer que $e^{ip}-e^{iq}$ a pour argument :

      - $\dfrac{p+q+\pi}{2}$ si $p-q \in [0, 2\pi[$,
      - $\dfrac{p+q+3\pi}{2}$ sinon.

CORRECTION P 83

Exercice à préparer

1. On pose $z_0 = 1+i$. Calculer z_0^2, z_0^3 et z_0^4.
   On donnera les réponses sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

2. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4-6z^3+18z^2-24z+16=0 \qquad (E)$$

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $z = a + ia$. Montrer que :

$$z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 24z + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 6a - 4 = 0 \\ a^3 - 3a^2 + 2a = 0. \end{cases}$$

(b) Résoudre l'équation d'inconnue $a \in \mathbb{R}$:

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0.$$

(c) En déduire deux solutions de (E).

3. (a) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E), alors $\bar{z}$ est solution de (E).
   (b) En déduire quatre solutions de (E) que l'on notera z_1, z_2, z_3 et z_4.

4. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 24z + 16 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4).$$

INDICATIONS P 68

Exercice supplémentaire

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et soit $l \in \mathbb{C}$.
On dit que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(l)$ et $\mathrm{Im}(l)$. On note alors :

$$l = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

1. On pose, dans cette question uniquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{i}{n}\right)(n + i)$.
   Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

2. (a) Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z| \text{ et } -|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|.$$

   (c) Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n| = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

3. On pose $z_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n + \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n = 1 + \left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\right)^n.$$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - 1| = 0$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

INDICATIONS P 68

Chapitre 14

Calcul vectoriel

Notions utilisées dans le(s) chapitre(s):

- Manipulation de vecteurs
- Produit scalaire
- Produit Vectoriel

Exercices à préparer

Exercice 1 Le repérage de l'orientation relative de deux bases $b_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ et $b_2(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ de l'espace peut se faire par les trois angles d'Euler. Ce paramétrage n'a pas les limites du paramétrage absolu de Cardan (roulis, tangage et lacet), classiquement utilisé pour repérer les rotations sur les bateaux ou les avions.

Les angles d'Euler sont les suivants :

- la précession $\psi = (\vec{x_1}, \vec{a}) = (\vec{y_1}, \vec{b})$ autour de $\vec{z_1} = \vec{c}$ permet d'obtenir $b_a(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
- la nutation $\theta = (\vec{b}, \vec{v}) = (\vec{c}, \vec{w})$ autour de $\vec{a} = \vec{u}$ permet d'obtenir $b_u(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- la rotation propre $\varphi = (\vec{u}, \vec{x_2}) = (\vec{v}, \vec{y_2})$ autour de $\vec{w} = \vec{z_2}$ permet d'obtenir $b_2(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$

1. Tracer les trois figures de calcul de passage de la base b_1 à la base b_a, de passage de la base b_a à la base b_u et de passage de la base b_u à la base b_2.
2. Déterminer les composantes de trois vecteurs de la base b_2 dans la base b_1

Exercice 2 Soient trois bases orthonormées directes $b_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, $b_2(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ et $b_3(\vec{x_3}, \vec{y_3}, \vec{z_3})$.

La base b_2 est telle que $\vec{z_1} = \vec{z_2}$ avec $\theta = (\vec{x_1}, \vec{x_2}) = (\vec{y_1}, \vec{y_2})$. La base b_3 est telle que $\vec{x_2} = \vec{x_3}$ avec $\varphi = (\vec{y_2}, \vec{y_3}) = (\vec{z_2}, \vec{z_3})$.

1. Tracer les figures de calcul de passage de la base b_1 à la base b_2 et de passage de la base b_2 à la base b_3.

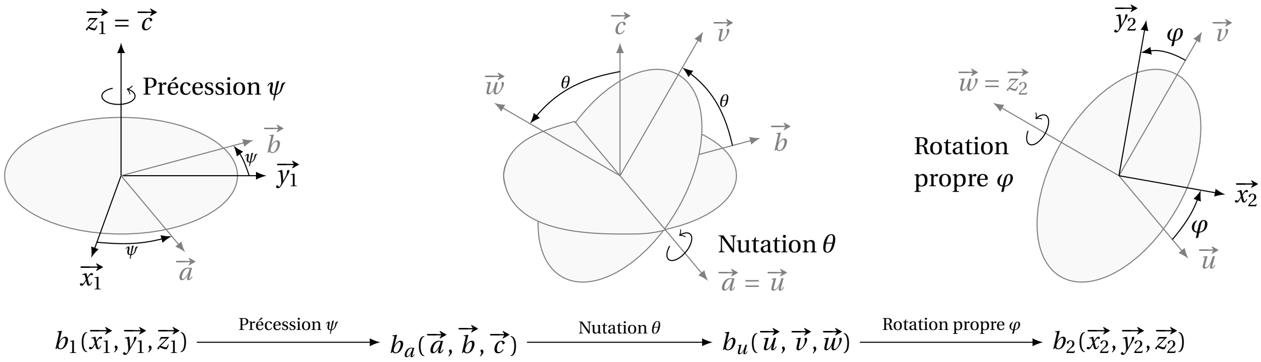


FIGURE 14.1 – Rotations successives dans le paramétrage d'Euler.

2. Déterminer les expressions des produits scalaires :
   $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3$, $\vec{x}_1 \cdot \vec{z}_3$, $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3$, $\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_3$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_3$, $\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_3$, et $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_3$.

3. Déterminer les composantes, dans la base b_2 puis dans la base b_1, des produits vectoriel :
   $\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3$, $\vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3$, $\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_3$, $\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_3$, $\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3$, $\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_3$, et $\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_3$.

Exercice 3 Soit le repère orthonormé direct $\mathscr{R}_1(O; \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

Soient les trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{x_1} + \vec{y_1} - 3\vec{z_1}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{x_1} + \vec{y_1} - \vec{z_1}$ et $\overrightarrow{OC} = 2\vec{x_1} + 4\vec{y_1} + 3\vec{z_1}$

1. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2. Un point $M \in (ABC)$, plan contenant les trois points A, B et C : que vaut le produit mixte $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

3. On pose $\overrightarrow{OM} = x\vec{x_1} + y\vec{y_1} + z\vec{z_1}$: en déduire l'équation du plan (ABC) dans le repère $\mathscr{R}_1$, soit l'équation en x, y et z.

Exercice 4 Soient le repère orthonormé direct $\mathscr{R}_1(O; \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

Soient trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{x_1} + 4\vec{y_1} + 3\vec{z_1}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{x_1} + 2\vec{y_1} - 3\vec{z_1}$ et $\overrightarrow{OC} = -4\vec{x_1} + 5\vec{y_1} + 2\vec{z_1}$.

Soient (π) le plan (ABC) de normale unitaire $\vec{n}$ et le vecteur $\vec{V} = 3\vec{x_1} + \vec{y_1} - 2\vec{z_1} = x\vec{n} + y\vec{t}$ avec $\vec{t}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{n}$ et x et y deux scalaires réels correspondant aux composantes du vecteur $\vec{V}$ selon $\vec{n}$ et $\vec{t}$.

1. Faire un dessin expliquant la problématique.

2. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n}$ dans la base $b(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

3. Déterminer la valeur de x puis celle de y (en la supposant positive) et enfin les composantes du vecteur $\vec{t}$.

Troisième partie

Indications et corrections

Chapitre 15

Indications et solutions

15.1 Résolution d'équations et d'inéquations

Echauffement

1. *Solution :* $x = \dfrac{ab}{b-a}$

2. (a) *Solution :* $x \leq -\dfrac{1}{2}$

   (b) *Solution :* $x < -1$

   (c) Remarquer que $|2x-5| < 13 \Leftrightarrow -13 < 2x-5 < 13$.
   Solution : $-4 < x < 9$

   (d) Remarquer que $|3-4x| \geq 17 \Leftrightarrow 3-4x \geq 17$ ou $3-4x \leq -17$.
   Solution : $x \geq 5$ ou $x \leq -\dfrac{7}{2}$

3. (a) *Solution :* Remarquer que $2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$.
   Solution : $x = 4$ ou $x = 3$

   (b) Remarquer que $3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$.
   Solution : $x = 2$

   (c) *Solution :* $x = 1 + i$ ou $x = 1 - i$

Exercice à préparer

1. (a) Remarquer que l'équation considérée est $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$ et étudier son discriminant.
   Solution : $(a-d)^2 + 4bc > 0$

   (b) Appliquer la question précédente à $a = 2$, $d = 1$ et $bc = 6$.
   Solution : $r_1 = 4$ et $r_2 = -1$

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = 4X_n$ et $Y_{n+1} = -Y_n$ et utiliser la formule des suites géométriques avec $X_0 = 1$ et $Y_0 = 7$.

   (d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{3}{5}X_n + \dfrac{1}{5}Y_n$ et $y_n = \dfrac{1}{5}Y_n - \dfrac{2}{5}X_n$.
   Solution : $x_n = \dfrac{3 \times 4^n + 7 \times (-1)^n}{5}$ et $y_n = \dfrac{7 \times (-1)^n - 2 \times 4^n}{5}$

2. (a) Utiliser le discriminant.
   Solution : $b^2 - 4ac \geq 0$.
   (b) Remarquer que $ar^2 + br + c = 0$.
   (c) Raisonner par identification après avoir simplifié e^{rx}. On trouve $r = -\frac{b}{2a}$ donc le discriminant est nul.
   Solution : $b^2 - 4ac = 0$

Exercice supplémentaire

1. (a)
   (b) Raisonner par coefficients indéterminés.
   Solution : $a = 1$, $b = -7$, $c = 10$
   (c) Résoudre l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$.
   Solution : $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 5$
   (d) Remarquer que $r^3 - 8r^2 + 17r - 10 = 0$.
2. (a) *Solution :* $x = 2 + i$ ou $x = 2 - i$
   (b) Calculer les dérivées premières et secondes de g et h.

15.2 Puissances et suites géométriques

Echauffement

1. *Solution :* $a = 72$, $b = 8\sqrt{2}$, $c = -\frac{3}{4}$, $d = 9$.
2. *Solution :* $A = 8x^8$, $B = x^9y^2$, $C = y^2$, $D = y^2$.
3. *Solution :* $u_n = 2^n$ et $v_n = \frac{2}{3^{n-1}}$.
4. Montrer, en utilisant des inégalités, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_n \leq v_{n+1}$.

Exercice à préparer

1. (a) Utiliser les propriétés des puissances.
   (b) Se ramener au produit d'une quantité tendant vers $+\infty$ et d'une quantité tendant vers 1.
2. (a) Utiliser les propriétés des puissances.
   (b) Utiliser les propriétés des puissances.
   (c) Simplifier les 6^{2n}.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(6^n)^2 - 2\times 3^n}{5\times 36^n - 3^n} = \dfrac{1}{5}$.
3. Factoriser le numérateur par 9^n et le dénominateur par 16^n.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n + 7^n - 3^{2n}}{4^{2n} + 6^{n+1}} = 0$.
4. (a) Raisonner par récurrence pour montrer que $u_{n+1} \geq 0$ puis montrer que $\frac{n^2+2n+1}{2(n+1)^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
   (b) Raisonner par récurrence.
   (c) Utiliser le théorème des gendarmes.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice supplémentaire

1. Utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme.
2. Montrer que la limite est égale à la dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0.
3. (a) Utiliser le résultat précédent en remplaçant x par $\frac{a}{n}$.
   (b)
4. *Solution :* $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$
5. *Solution :* $v_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

15.3 Récurrences

Echauffement

1. Il est inutile de faire une récurrence, il suffit de remarquer que $\cos(\pi n^2 + 2) \leq 1$.
2. (a) Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ et calculer n^2.
   Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et calculer n^2.
   (b) Raisonner par récurrence. Ne pas oublier de montrer que u_{n+1} est un entier. Faire deux cas selon la parité de u_n et utiliser la question précédente.
3. Raisonner par récurrence.
4. (a) Remarquer que $f(n) = n$.
   (b) Montrer, par exemple, que $f(0) > f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice à préparer

1. Raisonner par récurrence.
2. (a) *Solution :* f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.
   (b) Remarquer que $e^{-1} < 1$.
3. Raisonner par récurrence.
   Solution : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.
4. Passer à la limite dans la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour montrer que $le^{3l} = l$.
5. (a) Raisonner par récurrence.
   (b) Raisonner par récurrence et utiliser la croissance de f sur $[0, +\infty[$.
   (c) Utiliser la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Raisonner par l'absurde pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et utiliser la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour conclure.
6. (a) Raisonner par récurrence et utiliser la croissance de f sur $\left[-\frac{1}{3}, 0\right[$.
   (b) Remarquer que $f(x) - x = x(e^{3x} - 1)$.
   (c) Appliquer la question précédente à $x = u_n$.

(d) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

7. (a) Utiliser les variations de f.

   (b) Se ramener au cas précédent.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice supplémentaire

1. (a) Calculer f'.
   Solution : f est décroissante.

   (b) On sait que $1 \leq 2 \leq e$ donc $0 \leq \ln(2) \leq 1$.

   (c) Utiliser la décroissance de f et les inégalités précédentes.

2. (a) Comme f n'est définie que sur $[0,1]$, il faut prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

   (b) Raisonner par récurrence et appliquer deux fois la fonction f à l'inégalité $u_{2n} \leq u_{2n+1}$, donc, en changeant deux fois le sens des inégalités.

   (c) *Solution :* $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1+\ln(2)}{2} \approx 0.85$, $u_2 = -\ln(3+\ln(2)) + \frac{1+3\ln(2)}{2} \approx 0,23$, $u_3 = -\ln\left(-\ln(3+\ln 2) + \frac{3+3\ln 2}{2}\right) + \frac{\ln 2+1}{2} \approx 0,64$.

   (d) Raisonner par récurrence pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$.

   (e) Raisonner par récurrence pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$.

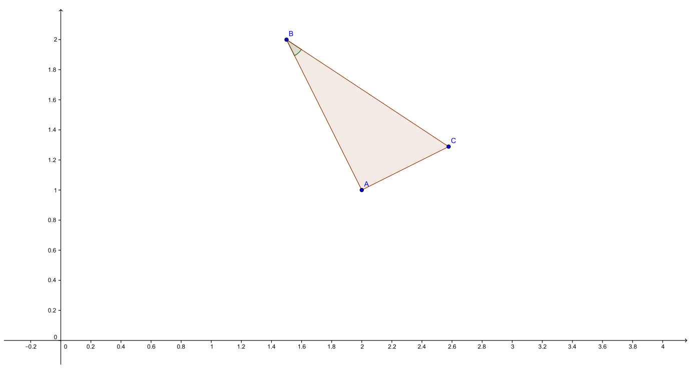
   (f) Raisonner par l'absurde.
   Solution : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

15.4 Géométrie plane et trigonométrie

Echauffement

1. *Solution :* $a = 4$, $b = 6$, $c = \frac{2}{3}$, $d = 2,5$

2. (a) *Solution :*



   (b) Se ramener à l'équation : $(x_B - 2)^2 + (2-1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
   Solution : $\frac{3}{2}$

(c) Appliquer le théorème de Pythagore.
Solution : $\frac{\sqrt{15}}{6}$

(d) Remarquer que $\cos\theta = \frac{AB}{BC}$ et $\sin\theta = \frac{AC}{BC}$.
Solution : $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice à préparer

1. (a) i. *Solution :* $\overrightarrow{AD} = k_1\overrightarrow{AB}$, $k_1 \in \mathbb{R}$
ii. *Solution :* $\overrightarrow{AE} = k_2\overrightarrow{AC}$, $k_2 \in \mathbb{R}$
iii. *Solution :* $\overrightarrow{DE} = k_3\overrightarrow{BC}$, $k_3 \in \mathbb{R}$

(b) Supposer $a \neq 0$ et en déduire que A, B, C sont alignés, ce qui est absurde.

(c) Montrer que $(-k_1 + k_3)\overrightarrow{AB} + (k_2 - k_3)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

(d) Appliquer deux fois le théorème de Thalès.

2. (a) i. Remarquer que $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}$ et raisonner de même pour les autres points.
ii. Remarquer que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ et raisonner de même pour les autres points.

(b) i. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$.
ii. Montrer que $\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires.

(c) Remarquer que (IC) est la médiane issue de C et raisonner de même pour les autres points.

Exercice supplémentaire

1. (a) *Solution :* $2e^{i\alpha}$

(b) *Solution :* $(2\cos(\alpha), 2\sin(\alpha))$

(c) Remarquer que l'angle entre $\vec{I}$ et $\vec{u}$ est $\alpha - \theta$.
Solution : $2e^{i(\alpha-\theta)}$

(d) *Solution :* $(2\cos(\alpha-\theta), 2\sin(\alpha-\theta))$

2. (a) *Solution :* $2\sqrt{3}$

(b) Calculer l'argument de l'affixe de $\vec{v}$.
Solution : $\frac{\pi}{6}$

3. (a) *Solution :* $(1, -\sqrt{3})$

(b) Calculer $\vec{u} + \vec{v}$.
Solution : 0

15.5 Dérivation et intégration

Echauffement

1. (a) *Solution :* $a = \frac{(e^x)^2}{e^y}$, $b = 1 + e^x$, $c = \frac{(e^x)^2}{e^y}$.

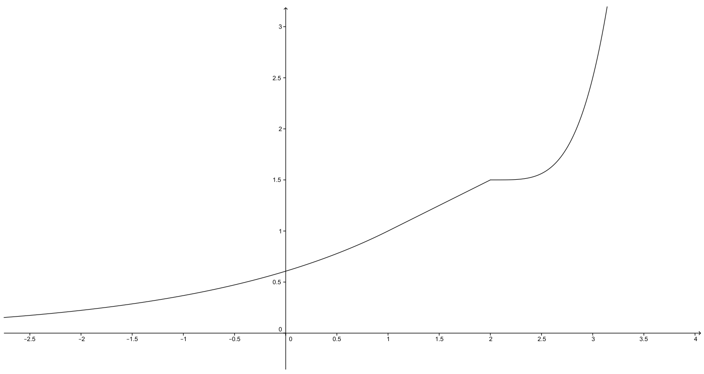
(b) *Solution :* $a = 2\ln(x) + 5\ln(y)$, $b = \ln(y)$, $c = \frac{\ln(x)+2\ln(y)}{\ln(x)}$.

(c) Pour b, étudier et simplifier d'abord $(e^x+e^{-x})^2 - e^x(e^x+e^{-3x})$
Solution : pour $x \in \mathbb{R}$, $a = \ln(3) + \frac{x}{2}$; pour $x \in \mathbb{R}$, $b = \ln(2)$; pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c = \frac{1}{2x^4}$.

2. Pour f, remarquer que $f(x) = x^{-4}$.
Solution : $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$, $g'(x) = (\frac{1}{x} + \ln(2x))e^x$, $h'(x) = \frac{(3(x^2+1)\ln(x^2+1)-2x)e^{3x}}{(\ln(x^2+1))^2(x^2+1)}$.

Exercice à préparer

1. (a) *Solution :* f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, sur $]1,2[$ et sur $]2,+\infty[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et on obtient la courbe suivante :



(b) Une primitive de $x \mapsto e^{(x-1)/2}$ est $x \mapsto 2e^{(x-1)/2}$, une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ est $x \mapsto \frac{(x+1)^2}{4}$ et une primitive de $x \mapsto (x-2)^4 + \frac{3}{2}$ est $x \mapsto \frac{(x-2)^5}{5} + \frac{3}{2}x$.
Solution : $\int_0^x f(t)\,dt = 2(e^{(x-1)/2} - e^{-1/2})$ si $x \le 1$, $\int_0^x f(t)\,dt = 1 - 2e^{-1/2} + \frac{(x+1)^2}{4}$ si $1 < x \le 2$, $\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{4} - 2e^{-1/2} + \frac{(x-2)^5}{5} + \frac{3}{2}x$ si $x > 2$.

2. (a) Mettre $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$ au dénominateur commun $(x-1)^3$.
Solution : $a = c = 1$, $b = -1$.

(b) Sur $]1,+\infty[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est $x \mapsto \ln(x-1)$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x-1}$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^3} = (x-1)^{-3}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2(x-1)^2}$.
Solution : $I = \ln 2 - \frac{5}{32}$.

3. (a) *Solution :* $f'(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right)e^{(x^2)}$, $f''(x) = \left(4x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^3}\right)e^{(x^2)}$.

(b) Remarquer que : $\dfrac{e^{(x^2)}(x^2-1)}{x^3} = 2xe^{(x^2)} - \dfrac{f''(x)}{2}$ et qu'une primitive de $x \mapsto 2xe^{(x^2)}$ est $x \mapsto e^{(x^2)}$.
Solution : $J = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{e}{2}$.

Exercice supplémentaire

1. (a) Etudier la fonction : $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(b) Etudier les fonctions $y \mapsto y - \sqrt{y^2-1}$ et $y \mapsto y + \sqrt{y^2-1}$.

(c) Se ramener à une équation du second degré et, en utilisant la question précédente, chercher une solution $X \geq 1$.
Solution : $X = y + \sqrt{y^2-1}$.

(d) Se ramener à la question précédente en posant $X = e^x$.
Solution : $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

2. (a) *Solution :* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(b) Remarquer que $I = f(3) - f(2)$.
Solution : $I = \ln \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$

(c) Remarquer que $\displaystyle\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = f(2) - f(x)$ et que $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.
Solution : $\ln(2+\sqrt{3})$

15.6 Formules de trigonométrie

Echauffement

1. (a) *Solution :* $\dfrac{\pi}{12}$

(b) Utiliser les formules de trigonométrie pour avoir : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}$.
Solution : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

2. (a) *Solution :* $\dfrac{7\pi}{12}$

(b) Utiliser les formules de trigonométrie pour avoir : $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}$.
Solution : $\cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le discriminant est $\Delta = (2\cos\theta)^2$.
Solution : $1+\cos\theta$ et $1-\cos\theta$.

(b) *Solution :* Pour $\theta = 0$: 2 et 0, pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$: $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$, pour $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$: $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$, pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$: $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Exercice à préparer

1. (a) Remarquer que $\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta)$ et que $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.
Solution : $2\cos^2\theta - 1$.

(b) Remarquer que $\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta)$.
Solution : $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

(c) Remarquer que $\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$.
Solution : $\sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$.

(d) Remarquer que $\cos(5\theta) = \cos(3\theta + 2\theta)$.
Solution : $\cos\theta(16\cos^4\theta - 20\cos^2\theta + 5)$.

2. (a) Remarquer que $0 \leq \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$.

   (b) Remarquer que $\cos\left(5\frac{\pi}{10}\right) = 0$ et utiliser le résultat de 1.d.

3. Calculer le discriminant associé à cette équation.
   Solution : $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

4. (a) Remarquer que $0 \leq \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$.

   (b) Elever au carré chacun des deux membres.

   (c) Comme $a > 0$, on a $a = \sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}}$ et utiliser les questions précedentes pour choisir le signe.
   Solution : $\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

5. Remarquer que $\sin\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \cos^2\dfrac{\pi}{10}}$, $\cos\dfrac{\pi}{5} = \cos\left(2\dfrac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2\dfrac{\pi}{5}}$.
   Solution :$\sin\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice supplémentaire

1. *Solution :* $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $v_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (a) Remarquer que $u_n = \cos\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et en déduire, en utilisant les formules de trigonométrie, que $u_n = 2u_{n+1}^2 - 1$.

   (b) Remarquer que $v_n = \sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et que $u_n = \sqrt{1 - v_n^2}$.

   (c) Utiliser les formules obtenues aux questions précédentes.
   Solution : $u_3 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2(\sqrt{2}+2)}}$.

3. Remarquer que $u_n^2 + v_n^2 = 1$.

4. Remarquer que $u_n - v_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$.

5. Remarquer que $u_n + i v_n = e^{i\pi/2^n}$.

15.7 Fonctions cosinus et sinus

Echauffement

1. *Solution :* $A = \frac{13\pi}{4}, B = -\frac{23}{26}$.
2. *Solution :* $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{12}$.
3. *Solution :* $-\frac{4\pi}{9} \leq x < \frac{\pi}{18}$.
4. *Solution :* $f_1'(x) = -2\sin(2x) + 3\cos(3x)$, $f_2'(x) = -2\sin(2x)\sin(3x) + 3\cos(2x)\cos(3x)$, $f_3'(x) = -7\sin(x) \times \cos^6(x)$, $f_4'(x) = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

Exercice à préparer

1. (a) Utiliser la 2π-périodicité du cosinus.

   (b) *Solution :* On obtient la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$ à partir de la courbe représentative de f sur $\left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$ en effectuant des translations horizontales de multiples de $\frac{2\pi}{5}$.
2. *Solution :* $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. L'étude du signe de f' sur $\left[-\frac{\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right]$ se déduit du signe du sinus sur $[0, 2\pi]$.
   Solution : $f'(x) = -5\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$, f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{20}, \frac{3\pi}{20}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}\right]$.
4.

Exercice supplémentaire

1. (a) *Solution :* Calculer $f(0) = \cos(\varphi)$ et par lecture graphique $f(0) \approx 0,87$.

   (b) On a $\cos(\varphi) \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Solution : $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
2. (a) *Solution :* $f'(0) = -\omega\sin(\varphi)$ et par lecture graphique (pente de la tangente à l'origine) $f'(0) \approx -1.5$.

   (b) On a $-\omega\sin(\varphi) = -\omega\sin\frac{\pi}{6} \approx -\frac{3}{2}$.
   Solution : $\omega = 3$.
3. (a) Utiliser la 2π-périodicité du cosinus.

   (b) *Solution :* $T \approx 2,1$

   (c) *Solution :* $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3$.

15.8 Nombres complexes

Echauffement

1. Pour e, on peut utiliser la valeur de d pour choisir le dénominateur commun.
   Solution : $a = -3i$, $b = \frac{9+13i}{10}$, $c = \frac{13-9i}{5}$, $d = \frac{7}{2} + 2i$, $e = \frac{3+i}{2}$
2. Pour z_3, passer par la forme trigonométrique.
   Solution : $\mathrm{Re}(z_1) = 19$, $\mathrm{Im}(z_1) = -2$, $|z_1| = \sqrt{365}$, $\mathrm{Re}(z_2) = -\frac{1}{5}$, $\mathrm{Im}(z_2) = \frac{3}{5}$, $|z_2| = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\mathrm{Re}(z_3) = -64$, $\mathrm{Im}(z_3) = 0$, $|z_3| = 64$

3. *Solution :* $|z_1| = 25$, $z_2 = 25$, $z_3 = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

4. *Solution :* $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$, $\arg(z_2) = \frac{7\pi}{12}$, $\arg(z_3) = \frac{\pi}{12}$, $\arg(z_4) = -\frac{2\pi}{3}$.

Exercice à préparer

1. *Solution :* $z_0^2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_0^3 = -2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_0^4 = -4 = 4e^{i\pi}$

2. (a) Remplacer z par $a+ia$ et écrire une équation pour la partie réelle et une équation pour la partie imaginaire.

   (b) Se ramener, dans le cas où $a \neq 0$ à une équation du second degré.
   Solution : $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = 2$.

   (c) Regarder, parmi les trois valeurs précédentes, celles qui vérifient $a^4 - 3a^3 + 6a - 4 = 0$.
   Solution : $1+i$ et $2+2i$

3. (a) Calculer le conjugué de $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 24z + 16$.

   (b) *Solution :* $1+i$, $1-i$, $2+2i$ et $2-2i$.

4. Remarquer que, $(z-(1+i))(z-(1-i)) = ((z-1)-i)((z-1)+i) = (z-1)^2 - i^2$ et raisonner de même pour l'autre terme.

Exercice supplémentaire

1. Calculer $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = i$.

2. (a) Utiliser $|z_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(z_n)^2 + \mathrm{Im}(z_n)^2}$.

   (b) Utiliser $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, $\mathrm{Re}(z)^2 \leq \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ et $\mathrm{Im}(z)^2 \leq \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

   (c) Appliquer l'inégalité de la question précédente à z_n et utiliser le théorème des gendarmes.

3. (a) Raisonner par récurrence.

   (b) Montrer que $|z_n - 1| = \frac{1}{2^n}$.

   (c) *Solution :* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 1$

Chapitre 16

Corrections

16.1 Résolution d'équations et d'inéquations

1. (a) L'équation est définie pour $6x-3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{2}$.
Soit $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tfrac{3x+1}{6x-3} = -\tfrac{7}{6} &\Leftrightarrow 6(3x+1) = -7(6x-3)\\
&\Leftrightarrow 18x+6 = -42x+21\\
&\Leftrightarrow 60x = 15\\
&\Leftrightarrow x = \tfrac{15}{60} = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc l'équation admet pour solution :

$$x = \frac{1}{4}.$$

(b) L'inéquation est définie pour $6x-3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{2}$.
Méthode 1 : Soit $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tfrac{3x+1}{6x-3} \leq -\tfrac{7}{6} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6(3x+1) \leq -7(6x-3) & \text{si } 6x-3>0\\ 6(3x+1) \geq -7(6x-3) & \text{si } 6x-3<0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 60x \leq 15 & \text{si } x > \frac{1}{2}\\ 60x \geq 15 & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} & \text{si } x > \frac{1}{2} \quad \text{(cas impossible)}\\ x \geq \frac{1}{4} & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \tfrac{1}{4} \leq x < \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc l'inéquation admet pour solution :

$$x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[.$$

Méthode 2 : Soit $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
\tfrac{3x+1}{6x-3} \leq -\tfrac{7}{6} &\Leftrightarrow \tfrac{3x+1}{6x-3} + \tfrac{7}{6} \leq 0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{2(3x+1)}{6(2x-1)} + \tfrac{7(2x-1)}{6(2x-1)} \leq 0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{20x-5}{6(2x-1)} \leq 0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{5(4x-1)}{6(2x-1)} \leq 0\\
&\Leftrightarrow \tfrac{4x-1}{2x-1} \leq 0
\end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	
$4x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{4x-1}{2x-1}$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

Donc l'inéquation admet pour solution :

$$x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[.$$

(c) L'inéquation est définie pour $6x-3 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{2}$.
Soit $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16 &\Leftrightarrow \left|\tfrac{3x+1}{6x-3}\right| \leq 4 \\ &\Leftrightarrow |3x+1| \leq 4|6x-3| \end{aligned}$$

Or, on a le tableau de signes suivant :

x		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$3x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$6x-3$	$-$		$-$	0	$+$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16 &\Leftrightarrow \begin{cases} -(3x+1) \leq -4(6x-3) & \text{si } x \leq -\frac{1}{3} \\ (3x+1) \leq -4(6x-3) & \text{si } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \\ (3x+1) \leq 4(6x-3) & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 21x \leq 13 & \text{si } x \leq -\frac{1}{3} \\ 27x \leq 11 & \text{si } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \\ 13 \leq 21x & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{13}{21} & \text{si } x \leq -\frac{1}{3} \\ x \leq \frac{11}{27} & \text{si } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \\ \frac{13}{21} \leq x & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{13}{21}$ et $-\dfrac{1}{3} < \dfrac{11}{27} < \dfrac{1}{2}$, ainsi :

$$\left(\tfrac{3x+1}{6x-3}\right)^2 \leq 16 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\tfrac{1}{3} \text{ ou } -\tfrac{1}{3} < x \leq \tfrac{11}{27} \text{ ou } \tfrac{13}{21} \leq x.$$

Donc l'inéquation admet pour solution :

$$x \in \left]-\infty, \frac{11}{27}\right] \text{ ou } x \in \left[\frac{13}{21}, +\infty\right[.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2ax + b$. Ainsi :
   - si $a > 0$, f' est négative sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et positive sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.
     Donc f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.
     D'où, pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$, $f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ et, pour tout $x \in \left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$, $f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.
     Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.
     Donc la courbe représentative de f admet un minimum au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$.

- si $a < 0$, f' est positive sur $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ et négative sur $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.
  Donc f est croissante sur $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$.
  D'où, pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$, $f(x) \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ et, pour tout $x \in \left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$, $f(x) \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.
  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.
  Donc la courbe représentative de f admet un maximum au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Dans tous les cas, la courbe représentative de f admet un extremum au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = ax^2\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right).$$

Or :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right) = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0, \end{cases}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

(c) i. On a $a > 0$ et $\frac{-b}{2a} = 1$ donc la courbe représentative de f admet un minimum au point d'abscisse $x = 1$ et ce minimum vaut $f(1) = 0$.
Il s'agit donc de la courbe f_1.

ii. On a $a < 0$ et $\frac{-b}{2a} = 1$ donc la courbe représentative de f admet un maximum au point d'abscisse $x = 1$ et ce maximum vaut $f(1) = 0$.
Il s'agit donc de la courbe f_3.

iii. On a $a > 0$ et $\frac{-b}{2a} = -1$ donc la courbe représentative de f admet un minimum au point d'abscisse $x = -1$ et ce minimum vaut $f(-1) = 0$.
Il s'agit donc de la courbe f_6.

iv. On a $a > 0$ et $\frac{-b}{2a} = -1$ donc la courbe représentative de f admet un minimum au point d'abscisse $x = -1$ et ce minimum vaut $f(-1) = 1$.
Il s'agit donc de la courbe f_5.

v. On a $a > 0$ et $\frac{-b}{2a} = -1$ donc la courbe représentative de f admet un minimum au point d'abscisse $x = -1$ et ce minimum vaut $f(-1) = -\frac{1}{2}$.
Il s'agit donc de la courbe f_7.

16.2 Puissances et suites géométriques

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 1^n = 1.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = (-1)^n \in \{-1, 1\}.$$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, si elle admet une limite, cette limite est finie.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -u_n$, donc par passage à la limite, $l = -l$, d'où $l = 0$.
De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$, ainsi, $|l| = 1$.
On a donc $|0| = 1$ ce qui est absurde.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$|u_{n+1}| - |u_n| = |x|^{n+1} - |x|^n = |x|^n(|x| - 1) \leq 0,$$
car $0 \leq |x| < 1$.
Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq 0$.
Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

(c) La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc est convergente.

(d) Supposons $l \neq 0$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1}| = |x^{n+1}| = |x|.|x^n| = |x|.|u_n|.$$
Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a :
$$l = |x|.l.$$
Or $l \neq 0$, donc, $|x| = 1$ ce qui contredit l'hypothèse $|x| < 1$.

(e) On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} -|u_n| = 0$.
Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$|u_{n+1}| - |u_n| = |x|^{n+1} - |x|^n = |x|^n(|x| - 1) \geq 0,$$
car $|x| > 1$.
Donc la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On considère la fonction définie, pour tout $x \in [1, +\infty[$, par $f(x) = x^n - n(x-1) - 1$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in [1, +\infty[$:
$$f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) \geq 0.$$
Donc f est croissante sur $[1, +\infty[$.
Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) \geq f(1)$, or $f(1) = 0$ donc, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) \geq 0$. On a donc $x^n - n(x-1) - 1 \geq 0$. Donc :
$$u_n \geq n(x-1) + 1.$$

ii. Comme $x-1>0$, on a : $\lim_{n\to+\infty} n(x-1)+1=+\infty$.
Donc, d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty.$$

(c) i. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a : $|u_n|=|x|^n$.
Donc, d'après la question précédente appliquée à $|x|>1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n|=+\infty.$$

ii. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite en $+\infty$.
Alors, comme $\lim_{n\to+\infty} |u_n|=+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=+\infty$ et, comme $x<0$, $\lim_{n\to+\infty} xu_n=-\infty$.
Donc, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=xu_n$, on a, par passage à la limite : $+\infty=-\infty$ ce qui est absurde.
- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=-\infty$ et, comme $x<0$, $\lim_{n\to+\infty} xu_n=+\infty$.
Donc, comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=xu_n$, on a, par passage à la limite : $-\infty=+\infty$ ce qui est absurde.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

16.3 Récurrences

1. (a)
- Pour $n=0$, on a $v_0=1\geq 0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $v_n\geq 0$.
On a $v_{n+1}=(n+1)v_n$, donc, comme $n+1\geq 0$ et $v_n\geq 0$, on a $v_{n+1}\geq 0$.

On a donc prouvé par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\geq 0$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1}-v_n=(n+1)v_n-v_n=nv_n\geq 0.$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c)
- Pour $n=0$, on a $v_0=1\geq 0$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $v_n\geq n$.
On a $v_{n+1}=(n+1)v_n$, ainsi :
  - Si $n\geq 1$, comme $v_n\geq n\geq 1$, on a $v_{n+1}\geq n+1$.
  - Si $n=0$, comme $v_0=1\geq 1$, on a $v_{n+1}\geq n+1$.

  Dans tous les cas, on a $v_{n+1}\geq n+1$.

On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n\geq n$.

(d) Comme $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$, on a, d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty.$$

(e)
- Pour $n=1$, on a $v_1=1.v_0=1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que $v_n=1\times2\times3\cdots\times n$.
On a alors :

$$v_{n+1}=(n+1)v_n=v_n\times(n+1)=1\times2\times3\cdots\times n\times(n+1)$$

On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=1\times2\times3\cdots\times n.$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x})}{n!} = \frac{nx^{n-1}e^{-x}}{n!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} - \frac{x^n e^{-x}}{n!} = f_{n-1}(x) - f_n(x).$$

Donc :

$$f_n' = f_{n-1} - f_n.$$

(b) Comme f_n est une primitive de f_n', on a :

$$\int_0^1 f_n'(x)\,dx = [f_n(x)]_0^1 = \frac{e^{-1}}{n!}.$$

(c) On a :

$$u_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - (-1) = 1 - e^{-1}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $f_n' = f_{n-1} - f_n$, on a :

$$\int_0^1 f_n'(x)\,dx = \int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Donc :

$$\frac{e^{-1}}{n!} = u_{n-1} - u_n.$$

Ainsi :

$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{en!}.$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\frac{1}{en!} \geq 0$, on a, d'après la question précédente :

$$u_n \leq u_{n-1}.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(f) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a : $\dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \geq 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}x^n}{n!}\,dx \geq 0$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

(g) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

(h) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, comme $0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq e^{-x} \leq 1$, on a :

$$\frac{x^n e^{-x}}{n!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Donc, comme $\int_0^1 \frac{1}{n!}\,dx = \frac{1}{n!}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq \frac{1}{n!}.$$

(i) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n!}.$$

Or d'après 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

16.4 Géométrie plane et trigonométrie

1. (a) On a $x_A \neq x_B$ donc $A \neq B$ ainsi la droite (AB) est bien définie.
   On a $x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) n'est pas verticale.

   (b) Comme A et B sont des points de la droite (AB), on a $y_A = ax_A + b$ et $y_B = ax_B + b$.
   En soustrayant ces deux égalités, on a $y_A - y_B = a(x_A - x_B)$.
   Et comme $x_A \neq x_B$, on obtient : $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

   (c) On a donc, en réinjectant la valeur précédente : $y_A = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A + b$.
   Ainsi $b = y_A - \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A = \dfrac{y_A(x_A - x_B) - (y_A - y_B)x_A}{x_A - x_B} = \dfrac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}$.

2. Soit D la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

   (a) Comme $x_0 \neq 0$, on a $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc la droite D est bien définie.
   On a $x_0 \neq 0$ donc la droite D n'est pas verticale.

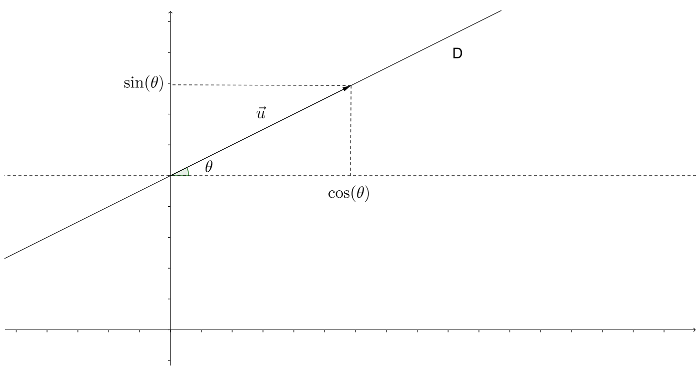
   (b) Soit B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors $D = (AB)$.
   De plus, $x_B - x_A = x_0$ et $y_B - y_A = y_0$.
   Donc, d'après les questions précédentes, $a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{-y_0}{-x_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$.

   (c) En appliquant les résultats précédents, on a :

$$b = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B} = \frac{x_A(y_0 + y_A) - (x_0 + x_A)y_A}{-x_0} = \frac{x_0 y_A - x_A y_0}{x_0}.$$

3. (a) Si $x_0 < 0$ comme $-\vec{u}$ est un vecteur directeur de D de coordonnées $(-x_0, -y_0)$ et $-x_0 > 0$, on peut, quitte à changer $\vec{u}$ en $-\vec{u}$, se ramener au cas où $x_0 > 0$.

   (b)



   (c) Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ est un vecteur directeur de D.
   De plus, d'après la question 2.b, la pente de la droite D est $a = \dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

4. (a) i. La pente de la droite D est :

$$a = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

On a $b = \dfrac{-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -5$, donc l'équation réduite de D est :

$$y = \sqrt{3}x - 5.$$

On a $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = a = \sqrt{3}$, donc $\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$. Or $\cos^2\theta + (\sqrt{3}\cos\theta)^2 = 1$, ainsi $\cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$. De plus, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\theta > 0$, ainsi, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. De plus $a > 0$, donc $\theta > 0$, on a donc :

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

ii. La pente de la droite D est :

$$a = \frac{y_0}{x_0} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On a $b = \dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$, donc l'équation réduite de D est :

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3.$$

On a $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta$. Or $\cos^2\theta + (-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta)^2 = 1$, ainsi $\cos^2\theta = \dfrac{3}{4}$. De plus, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\theta > 0$, ainsi, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. De plus $a < 0$, donc $\theta < 0$, on a donc :

$$\theta = -\frac{\pi}{6}.$$

iii. La pente de la droite D est :

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{8}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

On a $b = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times 3\sqrt{2} - \sqrt{8}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{8}} = \dfrac{9-10}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, donc l'équation réduite de D est :

$$y = x + \sqrt{2}.$$

On a $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = a = 1$, donc $\sin\theta = \cos\theta$. Or $\cos^2\theta + \cos^2\theta = 1$, ainsi $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$. De plus, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\theta > 0$, ainsi, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. De plus $a > 0$, donc $\theta > 0$, on a donc :

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

iv. La pente de la droite D est :

$$a = \frac{0-6}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = -\frac{6}{2\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

On a $b = \dfrac{\sqrt{3}\times 6 + \sqrt{3}\times 0}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 3$, donc l'équation réduite de D est :

$$y = -\sqrt{3}x + 3.$$

On a $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = a = -\sqrt{3}$, donc $\sin\theta = -\sqrt{3}\cos\theta$. Or $\cos^2\theta + (-\sqrt{3}\cos\theta)^2 = 1$, ainsi $\cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$. De plus, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\theta > 0$, ainsi, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. De plus $a < 0$, donc $\theta < 0$, on a donc :

$$\theta = -\frac{\pi}{3}.$$

(b) i. Le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$ est un vecteur directeur de D, or $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$. Ainsi $(1,1)$ est un vecteur directeur de D.
On a $a = \dfrac{1}{1} = 1$ et $b = \dfrac{2\times 1 + 1 \times 1}{1} = 3$, donc D a pour équation : $y = x + 3$.

ii. Le vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$ est un vecteur directeur de D, or $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1)$. Ainsi $(\sqrt{3}, -1)$ est un vecteur directeur de D.
On a $a = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = \dfrac{6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8$, donc D a pour équation : $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 8$.

16.5 Dérivation et intégration

1. (a) On a :

- pour $x < 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$,
- pour $x > 2$, $f'(x) = 2x - \dfrac{7}{2} > 4 - \dfrac{7}{2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$.

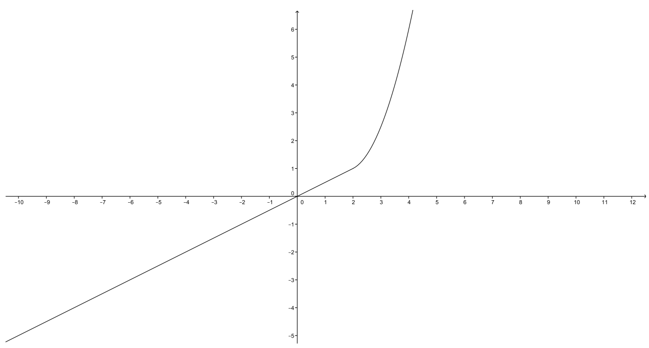
De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty,$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \frac{7}{2}x + 4 = +\infty.$$

On obtient donc la courbe suivante :



(b) On a :

- si $x \leq 2$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4},$$

si $x > 2$:

$$\begin{array}{rcl}
\int_0^x f(t)\,dt &=& \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt \\
&=& \int_0^2 \frac{t}{2}\,dt + \int_2^x (t^2 - \frac{7}{2}t + 4)\,dt \\
&=& \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^2 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{7t^2}{4} + 4t\right]_2^x \\
&=& 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{4} + 4x - \frac{8}{3} + 7 - 8 \\
&=& \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{4} + 4x - \frac{8}{3}.
\end{array}$$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$1 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) + a(x-1) + b(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + (a+b)x - 1 - a + b}{x^2 - 1}$$

Or :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=-1 \\ -1-a+b=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1-b \\ 2b=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \end{array}\right.$$

Ainsi $a = 2$ et $b = -3$ conviennent.

(b) On a :

$$\begin{array}{rcl}
I &=& \int_3^5 \frac{x^2-x-6}{x^2-1}\,dx \\
&=& \int_3^5 1 + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-1}\,dx \\
&=& [x + 2\ln(x+1) - 3\ln(x-1)]_3^5 \\
&=& 5 + 2\ln 6 - 3\ln 4 - 3 - 2\ln 4 + 3\ln 2 \\
&=& 2 + 2\ln 6 - 5\ln 4 + 3\ln 2 \\
&=& 2 + \ln \frac{6^2.2^3}{4^5} \\
&=& 2 + \ln \frac{9}{32}
\end{array}$$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

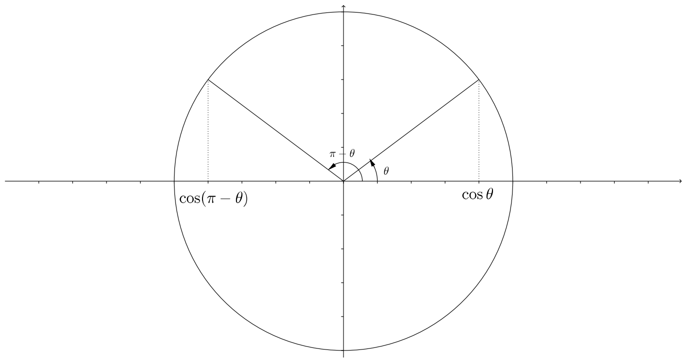
$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x.$$

(b) On a :

$$\begin{array}{rcl}
J &=& \int_1^e x\ln x\,dx \\
&=& \int_1^e \frac{f'(x)-x}{2}\,dx \\
&=& \frac{1}{2}\int_1^e (f'(x) - x)\,dx \\
&=& \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&=& \frac{1}{2}\left(f(e) - \frac{e^2}{2} - f(1) + \frac{1}{2}\right) \\
&=& \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{e^2}{2} - 0 + \frac{1}{2}\right) \\
&=& \frac{e^2+1}{4}
\end{array}$$

16.6 Formules de trigonométrie

1. (a) On a la figure suivante :



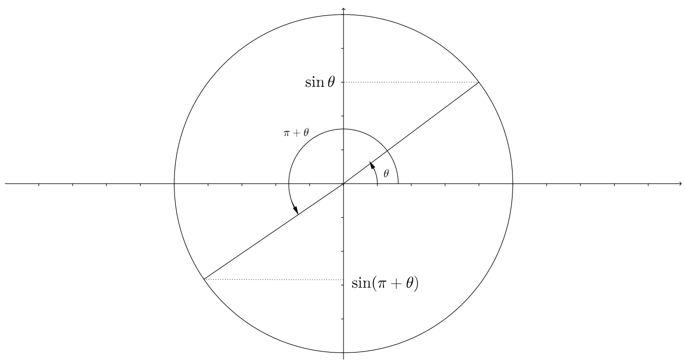
On remarque donc que :

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

De plus, on a :

$$\cos(\pi-\theta) = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta = (-1)\times\cos\theta + 0\times\sin\theta = -\cos\theta.$$

(b) On a la figure suivante :



On remarque donc que :

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

De plus, on a :

$$\sin(\pi+\theta) = \sin\pi\cos\theta + \cos\pi\sin\theta = 0.\cos\theta + (-1).\sin\theta = -\sin\theta.$$

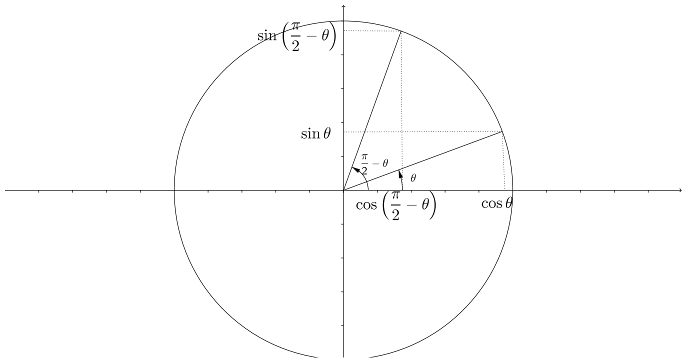
(c) On a :

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

et :

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

(d) On a la figure suivante :



On remarque donc que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

De plus, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\times\cos\theta+1\times\sin\theta=\sin\theta.$$

(e) La figure précédente permet de remarquer que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

De plus, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta=1\times\cos\theta-0\times\sin\theta=\cos\theta.$$

2. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos x=\sin\theta\quad&\Leftrightarrow\quad\cos x=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\\&\Leftrightarrow\quad x=\pm\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Donc les solutions sont :

$$x=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

(b) On a :

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\cos x+\sin x.$$

(c) Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\theta\quad&\Leftrightarrow\quad\sqrt{2}\cos\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\theta\\&\Leftrightarrow\quad\cos\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)=\sin\theta\\&\Leftrightarrow\quad x-\tfrac{\pi}{4}=\pm\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\end{aligned}$$

d'après la question précedente.
Donc les solutions sont :

$$x=\frac{3\pi}{4}-\theta+2k\pi\text{ et }x=-\frac{\pi}{4}+\theta+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Dans le cas particulier $\theta=\frac{3\pi}{4}$, les solutions sont :

$$x=2k\pi\text{ et }x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\cos x + \sin x = \cos\theta + \sin\theta &\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow \cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right)\\
&\Leftrightarrow x - \tfrac{\pi}{4} = \pm\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Donc les solutions sont :

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

16.7 Fonctions cosinus et sinus

1. (a)
   - $f(0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
   - $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,
   - $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) = 1$,
   - $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (b)
   - La dérivée de $x \mapsto x + \frac{\pi}{3}$ est $x \mapsto 1$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

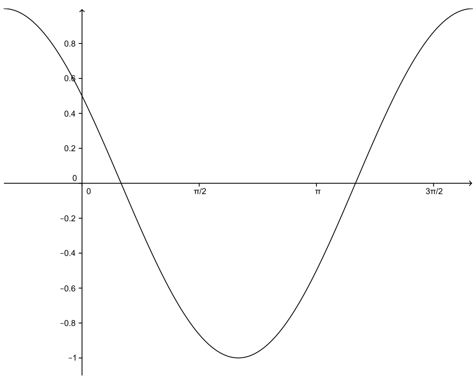
     $$f'(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

   - Si $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, alors $x + \frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi]$.
   - Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, on a :

     $$\begin{aligned}
     f'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \sin\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) \geq 0\\
     &\Leftrightarrow x + \tfrac{\pi}{3} \in [0, \pi]\\
     &\Leftrightarrow x \in \left[-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{2\pi}{3}\right]
     \end{aligned}$$

     Ainsi f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

   (c) On obtient donc la courbe suivante :

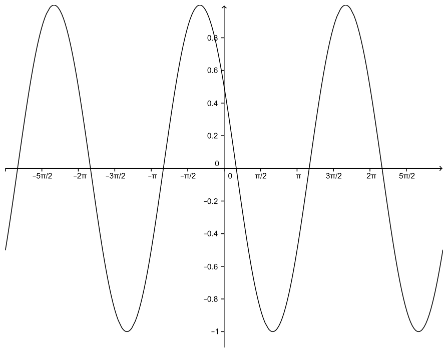


   (d)
   - On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

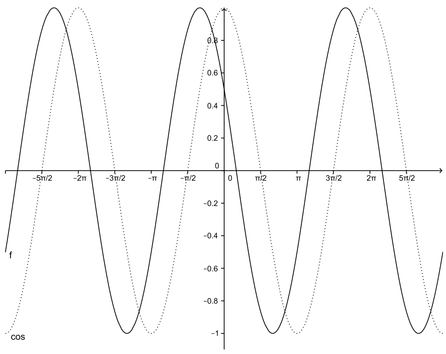
     $$f(x + 2\pi) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x).$$

     Donc f est 2π-périodique.

- L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ est de longueur 2π, donc on obtient la courbe représentative de f sur un intervalle quelconque en partant de celle sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ et en effectuant des translations horizontales de multiples de 2π.
- On obtient donc la courbe suivante :



(e) On a :



On remarque que l'on passe de la courbe représentative de cos à celle de f par une translation horizontale de $-\frac{\pi}{3}$.

2. (a)
   - $g(0) = \cos(0) = 1$,
   - $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,
   - $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$.

   (b) La dérivée de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto 2$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

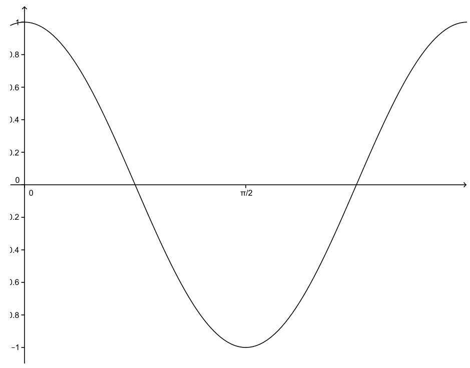
$$g'(x) = -2\sin(2x)$$

   - Si $x \in [0, \pi]$, alors $2x \in [0, 2\pi]$.
   - Soit $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x \in [0, \pi] \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

   Donc g est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et g est croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

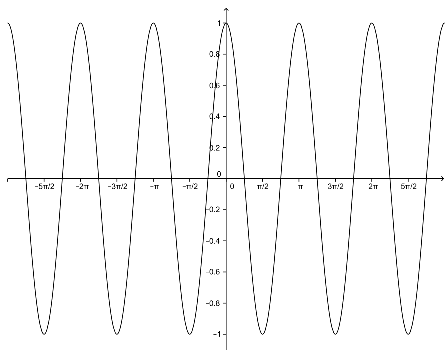
(c) On obtient donc la courbe suivante :



(d) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x+\pi) = cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x) = g(x).$$

(e) On obtient la courbe représentative de g sur un intervalle quelconque en partant de celle sur $[0,\pi]$ (qui est de longueur π) et en effectuant des translations horizontales de multiples de π. On a donc :



16.8 Nombres complexes

1. (a) On a :

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta}{2} = \cos\theta,$$

et

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta}{2i} = \sin\theta.$$

(b) i. On a, d'après la question précédente :

$$2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right).$$

Donc :

$$2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = e^{i\frac{p+q}{2}+i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{p+q}{2}-i\frac{p-q}{2}} = e^{ip}+e^{iq}.$$

ii. On a, d'après la question précédente :

$$2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}}\right).$$

Donc :

$$2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = e^{i\frac{p+q}{2}+i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{p+q}{2}-i\frac{p-q}{2}} = e^{ip}-e^{iq}.$$

Ainsi :

$$e^{ip}-e^{iq} = 2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

(c) On a :

$$|e^{ip}+e^{iq}| = \left|2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right|.$$

Or, $|e^{i\frac{p+q}{2}}|=1$, donc :

$$|e^{ip}+e^{iq}| = 2\left|\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right|.$$

De même :

$$|e^{ip}-e^{iq}| = \left|2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right|.$$

2. (a) En appliquant les formules précédentes :

$$|z_1| = 2\left|\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)\right| = 2\cos\frac{\pi}{12},$$

et

$$|z_2| = 2\left|\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)\right| = 2\sin\frac{\pi}{12}.$$

(b) D'après la question 1.b,

$$z_1 = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{6}} = |z_1|e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Ainsi :

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{6}.$$

De même,

$$z_2 = 2ie^{i\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right) = 2i\sin\frac{\pi}{12}e^{i\frac{\pi}{6}} = |z_2|e^{i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{2}} = |z_2|e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ainsi :

$$\arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}.$$

3. (a) En appliquant les formules précédentes :

$$|z_3| = 2\left|\cos\left(\frac{-\frac{13\pi}{15}-\frac{\pi}{5}}{2}\right)\right| = 2\left|\cos\left(-\frac{8\pi}{15}\right)\right| = -2\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right),$$

et

$$|z_4| = 2\left|\sin\left(\frac{-\frac{13\pi}{15}-\frac{\pi}{5}}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(-\frac{8\pi}{15}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{8\pi}{15}\right).$$

(b) D'après la question 1.b,

$$z_3 = 2e^{i\frac{-\frac{13\pi}{15}+\frac{\pi}{5}}{2}} \cos\left(\frac{-\frac{13\pi}{15}-\frac{\pi}{5}}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)e^{-i\frac{\pi}{3}} = -|z_3|e^{-i\frac{\pi}{3}} = |z_3|e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ainsi :

$$\arg(z_3) = \frac{2\pi}{3}.$$

De même,

$$\begin{aligned} z_4 &= 2ie^{i\frac{-\frac{13\pi}{15}+\frac{\pi}{5}}{2}} \sin\left(\frac{-\frac{13\pi}{15}-\frac{\pi}{5}}{2}\right) = 2i\sin\left(-\frac{8\pi}{15}\right)e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= -i|z_4|e^{-i\frac{\pi}{3}} = |z_4|e^{-i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{2}} = |z_4|e^{-i\frac{5\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\arg(z_4) = -\frac{5\pi}{6}.$$

4. (a) On a $-\pi < p \leq \pi$ et $-\pi \leq -q < \pi$, donc, en sommant ces inégalités, $-2\pi < p-q < 2\pi$.

(b) • Si $p-q \in [-\pi,\pi]$, alors $\frac{p-q}{2} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \geq 0$.
Ainsi, $|e^{ip}+e^{iq}| = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
D'où, d'après 1.b :

$$\begin{aligned} e^{ip}+e^{iq} &= 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= |e^{ip}+e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \end{aligned}$$

Donc $e^{ip}+e^{iq}$ a pour argument $\dfrac{p+q}{2}$.

• Si $p-q \notin [-\pi,\pi]$, alors $\frac{p-q}{2} \in]-\pi,\pi[\backslash[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) < 0$.
Ainsi, $|e^{ip}+e^{iq}| = -2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
D'où, d'après 1.b :

$$\begin{aligned} e^{ip}+e^{iq} &= 2e^{i\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= -|e^{ip}+e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= e^{i\pi}|e^{ip}+e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= |e^{ip}+e^{iq}|e^{i\frac{p+q+2\pi}{2}} \end{aligned}$$

Donc $e^{ip}+e^{iq}$ a pour argument $\dfrac{p+q+2\pi}{2}$.

(c) • Si $p-q \in [0,2\pi[$, alors $\frac{p-q}{2} \in [0,\pi[$, donc $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \geq 0$.
Ainsi, $|e^{ip}+e^{iq}| = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
D'où, d'après 1.b :

$$\begin{aligned} e^{ip}-e^{iq} &= 2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= i|e^{ip}-e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}|e^{ip}-e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= |e^{ip}-e^{iq}|e^{i\frac{p+q+\pi}{2}} \end{aligned}$$

Donc $e^{ip}-e^{iq}$ a pour argument $\dfrac{p+q+\pi}{2}$.

• Si $p-q \notin [0,2\pi[$, alors $\frac{p-q}{2} \in]-\pi,0[$, donc $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) < 0$.
Ainsi, $|e^{ip}-e^{iq}| = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

D'où, d'après 1.b :

$$\begin{aligned} e^{ip}-e^{iq} &= 2ie^{i\frac{p+q}{2}}\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ &= -i|e^{ip}-e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= e^{i\frac{3\pi}{2}}|e^{ip}-e^{iq}|e^{i\frac{p+q}{2}} \\ &= |e^{ip}-e^{iq}|e^{i\frac{p+q+3\pi}{2}} \end{aligned}$$

Donc $e^{ip}-e^{iq}$ a pour argument $\dfrac{p+q+3\pi}{2}$.