Les exercices ne sont pas rangés par ordre de difficulté. Cette fiche est longue et ne doit pas être traitée la dernière semaine des vacances…

Dérivation et intégration

On rappelle que si u est dérivable en x_0 et f en $u(x_0)$, alors, $x \mapsto f(u(x))$ est dérivable en x_0, de dérivée $u'(x_0)f'(u(x_0))$.

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, là où elles sont dérivables.

a. $x \mapsto \tan x$ ***d.*** $x \mapsto \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ***g.*** $x \mapsto \ln(x^2+1)$ ***j.*** $x \mapsto \sqrt{x^2}$

b. $x \mapsto \ln(x+1)$ ***e.*** $x \mapsto \sqrt{e^x-x-1}$ ***h.*** $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+3}}$ ***k.*** $x \mapsto \ln(\ln x)$

c. $x \mapsto e^{x^2}$ ***f.*** $x \mapsto \sin(e^x)$ ***i.*** $x \mapsto \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ***l.*** $x \mapsto \frac{x^{\ln x}}{x^2+1}$

Exercice 2. Étudier les fonctions suivantes : dresser leur tableau de variations, calculer les limites éventuelles et tracer l'allure des courbes représentatives.

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4 - x^3 + 1$. ***b.*** $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$.

c. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. ***d.*** $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f et étudier les variations de f.

b. Déterminer la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$. De même, déterminer la limite de $f(x) + x$ quand x tend vers $-\infty$.

c. Comment qualifier les droites $y = x + \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$? Étudier le signe de $f(x) - (x + \frac{1}{2})$ pour $x \geqslant 1$ et celui de $f(x) + x + \frac{1}{2}$ pour $x \leqslant -2$.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f et les droites de la question précédente, en prenant soin de leurs positions relatives.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ pour $t \neq 0$

a.** Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

b. Déterminer f' sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle est continue.

c. Étudier les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 5. Calculer des primitives des fonctions définies par les expressions :

a. $x+e^{-nx}$ ***b.*** $\frac{x}{1+x^2}$ ***c.*** $\tan x$ ***d.*** $\frac{x}{1-x^2}$ ***e.*** xe^{-x^2} ***f.*** $\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}$ ***g.*** $\sqrt{\cos x}\tan x$

h. $e^x\cos(e^x)$ ***i.*** xe^x ***j.*** x^3 ***k.*** x^{-3} ***l.*** $x\sqrt{x}$ ***m.*** $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ***n.*** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ***n.*** $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Exercice 6. On considère la suite $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer I_0 puis I_1 (*on pourra dériver* $(1-t)^{\frac{5}{2}}$).

b. Montrer que (I_n) est positive décroissante. En déduire qu'elle converge.

c. Montrer, en majorant la racine, que $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de (I_n).

Exercice 7. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u$.

a. Montrer que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\int_1^x e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_1^x e^{-\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u \leqslant 2e^{-\frac{1}{2}}$.

c. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(1) + 2e^{-\frac{1}{2}}$.

d. Montrer que φ admet une limite finie en $+\infty$, que l'on note l. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) \leqslant l$.

Suites et récurrence

Exercice 8. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes.

a. $a_n = (-1)^n$ ***b.*** $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ***c.*** $c_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ ***d.*** $d_n = \frac{\sin n}{n}$

Exercice 9. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes.

a. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ***b.*** $b_n = \ln(n+1) - \ln n$ ***c.*** $c_n = e^{n+1} - e^n$

Exercice 10. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes.

a. $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ***b.*** $b_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ ***c.*** $c_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ ***d.*** $d_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$

Exercice 11 (Exponentielle et logarithme).

a. À l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. De même, montrer que pour $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$.

b. En déduire que la suite de terme général $n \ln(1+\frac{x}{n})$ converge vers x.

c. Déterminer la limite de la suite de terme général $(1+\frac{x}{n})^n$.

Exercice 12 (Série harmonique). Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a. Montrer que $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

b. Si (u_n) converge, que dire de (u_{2n}) ? En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 13. Déterminer l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^n > n^2$.

Exercice 14. Montrer par récurrence que $-1+2-3+4-\cdots+(-1)^n n = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Exercice 15 (Suite arithmétique). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + r$.

a. Écrire u_n en fonction de u_0, r et n puis discuter de la convergence de (u_n).

b. En utilisant la formule de l'exercice 18, déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 16 (Suite géométrique). Soit (v_n) la suite définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = q v_n$.

a. Écrire v_n en fonction de v_0, q et n puis discuter de la convergence de (v_n).

b. Soit $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Si $q \neq 1$, simplifier $(1-q)S_n$. En déduire une expression de S_n en fonction de v_0, q et n et discuter de la convergence de la suite (S_n).

Exercice 17 (Suite arithmético-géométrique). Soit (w_n) la suite définie par $w_0 \in \mathbb{R}$ et $w_{n+1} = a w_n + b$, $a \neq 1$.

a. Résoudre $x = ax + b$. Soit l la solution et $w'_n = w_n - l$.

b. Prouver que (w'_n) est géométrique. En déduire (w_n) et discuter de sa convergence.

Exercice 18 (Récurrence). Démontrer que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ puis que l'on a $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Conjecturer, puis démontrer une formule fournissant la somme des n premiers entiers impairs.

Exercice 19 (Télescopage). On propose de calculer de deux manières différentes

$$S_n = (n+1)^2 - n^2 + n^2 - (n-1)^2 + (n-1)^2 - \cdots + k^2 - (k-1)^2 + \cdots + 2^2 - 1^2.$$

a. Montrer que $S_n = (n+1)^2 - 1$ par des simplifications en cascade.

b. En regroupant et en développant les termes deux par deux, montrer que

$$S_n = 2(n + (n-1) + \cdots + (k-1) + \cdots + 1) + n.$$

c. En déduire une formule donnant la somme $1 + 2 + \cdots + n$.

d.* Appliquer cette technique avec des exposants 3 puis 4 au lieu de 2, afin de retrouver la somme des n premiers carrés et la somme des n premiers cubes.

Exercice 20. Démontrer par récurrence que $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. À partir de la formule $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, proposer une autre démonstration, en utilisant le principe de simplification « télescopique » introduit dans l'exercice 19.

Exercice 21. Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1}=\frac{5u_n}{2u_n+1}$ et $u_0=1$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $1\leqslant u_n\leqslant 2$.

b. Montrer que (u_n) est croissante puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

c. Pour tout entier n on pose $v_n=\frac{u_n-2}{u_n}$. Calculer v_0 puis v_1.

d. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et donner sa raison.

e. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

f. Pour tout entier n calculer $\frac{2}{u_0}+\frac{2}{u_1}+\cdots+\frac{2}{u_n}$ en fonction de n.

Exercice 22. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})$.

a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$. Dresser le tableau de variations de f puis tracer l'allure de la courbe représentative de f.

b. Montrer que pour tout n non nul, $u_n\geqslant\sqrt{2}$.

c. Montrer que si $x\geqslant 2$, $f(x)\leqslant x$; puis que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 23 (Suites récurrentes d'ordre 2).

a. Soit (u_n) définie par $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$, $u_0=1$ et $u_1=2$. Calculer les premiers termes de cette suite, conjecturer une expression de u_n et la démontrer par récurrence.

b. Soit (F_n) la suite de Fibonacci, avec $F_0=0$ et $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_n\leqslant\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

c.* Montrer qu'il existe α et β tels que pour tout n, $F_n=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. *On pourra déterminer α et β à l'aide de F_0 et F_1 puis effectuer une récurrence.*

d. Une grenouille monte un escalier de n marches en faisant des bons de une ou deux marches. De combien de façons peut-elle arriver en haut ?

Exercice 24 (Suites adjacentes). Soit (u_n) une suite décroissante et (v_n) une suite croissante telles que $u_n\geqslant v_n$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que si u_n-v_n tend vers 0 alors (u_n) et (v_n) convergent et leur limite est la même. On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. En s'aidant d'un graphique et d'une comparaison d'aires, montrer que

$$\frac{1}{n+k}\geqslant\int_{n+k}^{n+k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\geqslant\frac{1}{n+k+1}.$$

c.* On pose $u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$ et $v_n=\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune à l'aide de la question précédente.

Exercice 25. On considère $n\in\mathbb{N}^*$ et on rappelle que $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$.

a. Montrer par récurrence que $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^n$.

b. Montrer par récurrence que $(n+1)!\geqslant 1!+2!+3!+\cdots+n!$.

c. En déduire que la suite de terme général $\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$ converge vers 1.

Exercice 26 (Coefficients binomiaux)**.** Soit E un ensemble possédant n éléments et k un entier compris entre 0 et n. On note $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles de E distincts, possédant k éléments.

a.* Pour déterminer un sous-ensemble de E à k éléments, on commence par considérer un élément, que l'on choisit ou non. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

b. En déduire, par récurrence sur n, que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

c.* Combien y a-t-il de sous-ensembles de E ? (*Chaque élément peut être choisi ou non pour construire un sous-ensemble*).

d.* En déduire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.

e.* Montrer que pour $2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{2}$ et en déduire que la suite définie par $u_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 27. On note $f^{(n)}$ la n-ième dérivée de f. Montrer que

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 28 ($\star$)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit $u_n = \sin(na)$ et $v_n = \cos(na)$. En considérant (u_{n+1}) et (v_{n+1}) montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge. En déduire qu'aucune des deux suites ne converge.

Exercice 29. Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone régulier à n côtés.

Exercice 30 ($\star$)**.** Montrer que si $n > 5$, on peut découper un carré en n petits carrés.

Exercice 31 ($\star$)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en combien de parties le plan est-il découpé par n droites distinctes, deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes ?

Raisonnements divers

Exercice 32. Déterminer un entier à 10 chiffres dont le premier chiffre fournit le nombre de 0 de cet entier, le deuxième le nombre de 1, etc, et le dernier le nombre de 9.

Exercice 33. On dispose de 101 livres. Montrer que 11 livres ont le même titre ou qu'il existe 11 livres ayant des titres deux à deux différents.

Exercice 34. Montrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 35. Soit (u_n) une suite d'entiers naturels convergente. Montrer que (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 36 ($\star$)**.** Soit (x_n) la suite des décimales de $\sqrt{2}$. À l'aide des exercices 35, 16 et 34, montrer que (x_n) diverge. Que dire de $\left(\frac{x_n}{n}\right)$?

Exercice 37. On considère le cadran d'une horloge. Quel est l'angle formé par les droites $(5h, 7h)$ et $(11h, 2h)$? Combien y a-t-il de façons de réaliser cet angle de façon analogue, c'est-à-dire par deux droites passant par deux heures ?

Exercice 38. On dit qu'un nombre, en base 10, est un palindrome s'il peut se lire de la même façon dans les deux sens. Quel est le 2017-ième nombre palindrome ?

Alphabet grec

alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	zêta	êta	thêta	iota	kappa	lambda	mu	nu	xi	omicron	pi	rho	sigma	tau	upsilon	phi	khi	psi	oméga
α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω